1. Линейное пространство над произвольным полем. Ранг и база системы векторов.

Пусть дано поле P. Непустое мн–во V называется ***линейным*** или ***векторным пространством над полем P***, если на этом мн–ве определены внутренний $V \times V \to V$ (сложение) и внешний $P \times V \to V$ (умножение на число из P) законы композиции, удовлетворяющие аксиомам: $\forall a, b, c \in V$ и $\alpha, \beta \in P$

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \theta \in V: a + \theta = \theta + a = a$
4. для $\forall a \in V \ \ \exists - a \in V: a + (-a) = (-a) + a = \theta$
5. $1 \cdot a = a$
6. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $a(a + b) = \alpha a + \alpha b$

Линейное пр–во над полем $\mathbb{R}$ – ***вещественное линейное пр–во***, над полем $\mathbb{C}$ – ***комплексное***. Рассмотрим конечные системы $a_1, \dots, a_n$ векторов. Линейно независимая подсистема системы векторов, через которую линейно выражается $\forall$ вектор системы, называется ***базой*** этой ***системы векторов***.

Т1. *Подсистема системы векторов является базой системы векторов ⇔ образует максимальную линейно независимую подсистему.*

Док–во. Необх–сть. Пусть в системе векторов $a_1, \dots, a_r, \dots a_n$ подсистема $a_1, \dots, a_r$ образует базу =>

$\forall$ б**о**льшая подсистема будет линейно зависимой по Т (*), т.к. $\forall$ ее вектор линейно выражается через базу $a_1, \dots, a_r$ => база образует максимальную линейно независимую подсистему.

Дост–сть. Пусть $a_1, \dots, a_r$ – максимальная линейно независимая подсистема системы $a_1, \dots, a_r, \dots a_n$ => для $\forall a_i, i = \overline{1, k}$, подсистема $a_1, \dots, a_r, a_i$ – линейно зависима (если $i < r$, то как подсистема, содержащая 2 одинаковых вектора; если $i > r$, то как подсистема из r+1 > r векторов). По Т (**) a_i – линейно выражается через $a_1, \dots, a_r$ => $a_1, \dots, a_r$ – база. •

С1. *Все базы одной системы векторов состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых векторов системы.*

Число векторов базы называется ***рангом системы векторов****:* $rg\ (a_1, \dots, a_n)$ = максимальному числу линейно независимых векторов системы.

2 системы векторов линейного пр–ва называются ***эквивалентными***, если каждая из этих систем выражается через другую => *база системы векторов эквивалентна самой системе.*

Т2. *Если система* $a_1, \dots, a_k$ *линейно выражается через* $b_1, \dots, b_m$*, то* $rg\ (a_1, \dots, a_k) < rg\ (b_1, \dots, b_m)$.

Док–во. Пусть $a_1, \dots, a_r$ и $b_1, \dots, b_s$ – базы. Из условия теоремы и транзитивности свойства "линейной выражаемости" => база $a_1, \dots, a_r$ 1–й системы линейно выражается через базу $b_1, \dots, b_s$ 2–й => r < s, т.к. иначе, если r > s, система $a_1, \dots, a_r$ была бы линейно зависимой по Т (*). •

С2. *Ранги эквивалентных систем совпадают.*

С3. *Эквивалентные линейно независимые системы векторов состоят из одинакового числа векторов.*

Система векторов $e_1, \dots, e_n$ линейного пр–ва V ***порож–дает пр–во*** V, если $\forall x \in V$ является линейной комби–нацией $e_1, \dots, e_n$. Упорядоченная система векторов $e_1, \dots, e_n$ линейного пр–ва V называется ***базисом*** V, если она линейно независима и порождает V.

Т1. $\forall$ *2 базиса линейного пр–ва состоят из одинакового числа векторов.* (=> из эквивалентности двух базисов линейного пр–ва и С2).

Число векторов базиса не зависит от самого базиса и однозначно определяется самим пр–вом (Т *).

Число векторов базиса линейного пр–ва V – ***размерность пространства*** V : dim V. Размерность 0–го пр–ва по определению = 0. Из Т*** => dim V = максимальному числу линейно независимых векторов этого пр–ва. Линейное пр–во размерности n, $n \in \mathbb{N}$, называется *n–мерным.* 0–е пространство и n–мерные пр–ва называются ***конечномерными***. Линейное пр–во называется ***бесконечномерным***, если для $\forall k \in \mathbb{N}$ в пр–ве $\exists\ k$ линейно независимых векторов. Пример: пр–во M_∞ многочленов всех степеней.

Т2 (о неполном базисе). *В n–мерном пр–ве* $\forall$ *линейно независимую систему из k, где k < n, векторов можно дополнить до базиса.*

Док–во. $e_1 \dots, e_n$ – линейно независимая система векторов пр–ва V. Т.к. $k < n$ => в силу Т*** система $e_1, \dots, e_k$ не является базисом V => не порождает всего пр–ва V. Пусть вектор $e_{k+1} \in V$ не является линейной комбинацией $e_1, \dots, e_k$ => система векторов $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}$ линейно независима (в силу Т**). Если $k+1 = n$, то эта система векторов образует базис V, если же $k+1 < n$, то ан–но построим линейно независимую систему из

$k + 2$ векторов. За $n - k$ таких шагов мы построим искомый базис $e_1 \dots, e_k, \dots, e_n$. •

Коэффициенты разложения вектора по базису называются ***координатами вектора в этом базисе***.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ – 2 базиса n–мерного пр–ва V. Векторы 2–го базиса, как векторы пр–ва V, разлагаются по базису e:

$$f_1 = c_{11} e_1 + \dots + c_{n1} e_n$$
$$\dots$$
$$f_n = c_{1n} e_1 + \dots + c_{nn} e_n$$

Коэффициенты c_{ij} этих разложений образуют матрицу $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ***перехода от базиса е к базису f***.

1°. *Разложение вектора по базису единственно.*

2°. *Координаты вектора обладают линейностью.*

3°. *При переходе от базиса е к базису* $f = eC$ *координаты вектора х изменяются :* $x_e = C\, x_f$

---

*: *Если в линейном пр–ве б**о**льшая система векторов линейно выражается через меньшую, то б**о**льшая система линейно зависима*

**: *Если система* $a_1, \dots, a_n$ *линейно независима, а система* $a_1, \dots, a_n, b$ *линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы* $a_1, \dots, a_n$

***: *Система векторов* $e_1, \dots, e_n$ *линейного пр–ва является его базисом ⇔ она образует максимальную линейно независимую систему векторов этого пр–ва*

2. **Изоморфизм линейных пространств**

Система векторов $e_1, \dots, e_n$ линейного пр–ва V ***порож–дает пр–во*** V, если $\forall x \in V$ является линейной комби–нацией $e_1, \dots, e_n$. Упорядоченная система векторов $e_1, \dots, e_n$ линейного пр–ва V называется ***базисом*** V, если она линейно независима и порождает V.

Т1. $\forall$ *2 базиса линейного пр–ва состоят из одинако–вого числа векторов.* (=> из эквивалентности двух базисов линейного пр–ва и следствия (*Ранги эквивалентных систем совпадают*)).

Число векторов базиса не зависит от самого базиса и однозначно определяется самим пр–вом (Т *).

Число векторов базиса линейного пр–ва V – ***размерность пространства*** V : dim V. Размерность 0–го пр–ва по определению = 0. Из Т* => размерность линейного пр–ва = максимальному числу линейно независи-мых векторов этого пр–ва. Линейное пр–во размерности n, $n \in \mathbb{N}$, называется *n–мерным.* 0–е пространство и n–мерные пр–ва называются ***конечномерными***. Линейное пр–во называется ***бесконечномерным***, если для $\forall k \in \mathbb{N}$ в пр–ве $\exists\ k$ линейно независимых векторов. Пример: пр–во M_∞ многочленов всех степеней.

Т2 (о неполном базисе). *В n–мерном пр–ве* $\forall$ *линейно независимую систему из k, где k < n, векторов можно дополнить до базиса.*

Док–во. $e_1 \dots, e_n$ – линейно независимая система векторов пр–ва V. Т.к. $k < n$ => в силу Т* система $e_1, \dots, e_k$ не является базисом V => не порождает всего пр–ва V. Пусть вектор $e_{k+1} \in V$ не является линейной комбинацией $e_1, \dots, e_k$ => система векторов $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}$ линейно независима (в силу Т**). Если $k+1 = n$, то эта система векторов образует базис V, если же $k+1 < n$, то ан–но построим линейно независимую систему из

$k + 2$ векторов. За $n - k$ таких шагов мы построим искомый базис $e_1 \dots, e_k, \dots, e_n$. •

Коэффициенты разложения вектора по базису называются ***координатами вектора в этом базисе***.

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ – 2 базиса n–мерного пр–ва V. Векторы 2–го базиса, как векторы пр–ва V, разлагаются по базису e: $f_1 = c_{11} e_1 + \dots + c_{n1} e_n$

$$\dots$$
$$f_n = c_{1n} e_1 + \dots + c_{nn} e_n$$

Коэффициенты c_{ij} этих разложений образуют матрицу $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ***перехода от базиса е к базису f***.

1°. *Разложение вектора по базису единственно.*

2°. *Координаты вектора обладают свойством линейности.*

3°. *При переходе от базиса е к базису* $f = eC$ *координаты вектора х изменяются :* $x_e = C\, x_f$

2 линейных пр–ва V_1 и V_2 над общим полем P называются ***изоморфными*** ($V_1 \cong V_2$), если $\exists$ биективное отображение φ: $V_1 \to V_2$, которое сохраняет законы композиции, т.е. если для $\forall x, y \in V_1$ и $\forall$ числа $\alpha \in P$

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ 2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

Само отображение φ называется ***изоморфизмом линейных пространств***.

Св–ва изоморфных пр–тв:

1°. *Отношение изоморфизма – отношение эквива–лентности на мн–ве всех линейных пр–тв над* P.

2°. *В изоморфных пр–вах*

а) образ (и прообраз) линейной комбинации векторов есть линейная комбинация образов (прообразов) с теми же коэффициентами;

б) образ (и прообраз) 0–го вектора есть 0–й вектор;

в) образ (и прообраз) линейно независимой системы векторов образует линейно независимую систему;

г) образ (и прообраз) базиса есть базис.

Док–ва этих свойств опираются на определение и элементарные св–ва объектов.

Т(критерий изоморфизма). *2 линейных пр–ва над общим полем изоморфны ⇔ их размерности равны.*

Док–во. Необх–сть => из св–ва *"г"* изоморфных пр–тв.

Дост–сть. Пусть V_1 и V_2 – линейные пр–ва над полем P и dim V_1 = dim V_2 = n. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис V_1 ,

$f_1, \dots, f_n$ – базис V_2 . Построим отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, : $\forall\ x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in V_1 \to y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in V_2$ (т.е. вектор y имеет те же координаты, что и x). Из единственности разложения вектора по базису => отображение φ биективно. И φ – изоморфизм, т.к. координаты вектора обладают св–вом линейности.

С. $\forall$ *n–мерное вещественное пр–во изоморфно арифметическому пр–ву* $\mathbb{R}^n$, а *любое n–мерное комплексное пр–во – арифметическому пр–ву* $\mathbb{C}^n$.

---

*: *Система векторов* $e_1, \dots, e_n$ *линейного пр–ва является его базисом ⇔ она образует максимальную линейно независимую систему векторов этого пр–ва*

**: *Если система векторов* $a_1, \dots, a_n$ *линейно независима, а система* $a_1, \dots, a_n, b$ *линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы* $a_1, \dots, a_n$

3. Сумма и пересечение линейных пространств.

Подмножество L линейного пр–ва V над полем P называется ***линейным подпространством*** пр–ва V, если оно является линейным пр–вом относительно законов композиции в V.

Пусть $a_1, ..., a_k$ – система векторов линейного пр–ва V над полем P. ***Линейной оболочкой*** *$\mathcal{L}(a_1, ..., a_k)$ системы векторов $a_1, ..., a_k$* называется мн–во всевозможных линейных комбинаций этих векторов: $\mathcal{L}(a_1, ..., a_k) = \{ a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i | \alpha_i \in P, i = \overline{1,k} \}$

=> ∀ конечномерное пр–во является линейной оболочкой векторов своего базиса.

T1. *Если $a_1, ..., a_k$ – векторы линейного пр–ва V, то $\mathcal{L}(a_1, ..., a_k)$ является линейным подпространством пр–ва V*. (Вытекает из Т*, т.к для линейной оболочки $\mathcal{L}(a_1, ..., a_k)$ обе импликации имеют место.)

Линейная оболочка $\mathcal{L}(a_1, ..., a_k)$ – это линейное подпространство, порождаемое векторами $a_1, ..., a_k$.

2 системы векторов линейного пр–ва ***эквивалентны***, если каждая из этих систем выражается через другую.

T2. *2 системы векторов линейного пр–ва эквивалентны ⇔ их линейные оболочки совпадают.*

Док–во. Необх–сть. Пусть системы $a_1, ..., a_k$ и $b_1, ..., b_m$ эквивалентны => $\mathcal{L}(a_1, ..., a_k) = \mathcal{L}(b_1, ..., b_m)$, т.к. для этих множеств имеет место двустороннее вложение. *Дост–сть* очевидна.

C1. *Линейная оболочка системы векторов совпадает с линейной оболочкой своей базы.*

C2. $\dim \mathcal{L}(a_1, ..., a_k) = \mathrm{rg}(a_1, ..., a_k)$.

T3 (о монотонности размерности). *Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пр–ва. Подпространство той же размерности, что и все пр–во, совпадает с пр–вом.*

Док–во. Пусть L – линейное подпространство V, $\dim L = k$, $\dim V = n$ => $k \le n$, т.к. иначе в n – мерном пр–ве V ∃ k ($k > n$) линейно независимых векторов (например, векторы базиса L). Пусть $k = n$ и $e_1, \ldots, e_n$ – базис L. $\dim V = n$ => векторы $e, \ldots, e_n$ образуют базис V (*В n – мерном пр–ве ∀ n линейно независимых векторов образуют базис*). Т.о., $L = V = \mathcal{L}(e_1, ..., e_n)$. •

Пусть $L_1,...,L_k$ – линейные подпространства линейного пр–ва V. ***Суммой подпространств*** $L_1,...,L_k$ называется множество всевозможных векторов x, представимых в виде $x = x_1 + ... + x_k$ (*разложение вектора x по подпространствам* $L_1,...,L_k$), где $x_i \in L_i, i = \overline{1,k}$.

$L_1 + ... + L_k = \sum_{i=1}^{k} L_i = \{x = x_1 + \cdots + x_k \mid x_i \in L_i, i = \overline{1,k}\}$

Пересечение подпространств $L_1,...,L_k$ называется множество $L_1 \cap ... \cap L_k = \{x \in V \mid x_i \in L_i, i = \overline{1,k}\}$

0–й вектор $\theta \in L_1 \cap ... \cap L_k$.

T4. *Сумма и пересечение подпространств линейного пр–ва V являются линейными подпространствами пр–ва V*. (Вытекает из Т*, т.к. для $\sum_{i=1}^{k} L_i$ и $\bigcap_{i=1}^{k} L_i$ справедливы обе импликации)

$\forall L_i, i = \overline{1,k}$ и их пересечение являются линейными подпространствами суммы $L_1 + ... + L_k$, а пересечение $L_1 \cap ... \cap L_k$ – линейным подпространством $\forall L_i$

T5. *Сумма линейных подпространств есть линейная оболочка совокупности базисов слагаемых подпространств.*

Док–во. Пусть $e_1, ..., e_m, f_1, ..., f_s, ..., q_1, ..., q_t$ – базисы подпространств $L_1, L_2, ..., L_k$. Положим $W = \mathcal{L}(e_1, ..., e_m, f_1, ..., f_s, ..., q_1, ..., q_t)$ => $W = L_1 + ... + L_k$, т.к. для этих множеств имеет место двустороннее вложение. •

C. *Размерность суммы линейных подпространств = рангу совокупности слагаемых подпространств:*

$\dim \sum_{i=1}^{k} L_i = \mathrm{rg}(e_1, ..., e_m, f_1, ..., f_s, ..., q_1, ..., q_t)$.

(Вытекает из Т5 с учетом Т3)

T6. *Для ∀ линейных подпространств L_1 и L_2 пр–ва V*: $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2$. **(1)**

Док–во. Пусть $L_1 \cap L_2 \neq \{\theta\}$ и $f_1, ..., f_s$ – базис $L_1 \cap L_2$. Т.к. $L_1 \cap L_2 \subset L_1$ и $L_1 \cap L_2 \subset L_2$ => по Т** векторы $f_1, ..., f_s$ можно дополнить и до базиса L_1, и до базиса L_2. Пусть $e_1, ..., e_m, f_1, ..., f$ – базис L_1, а $f_1, ..., f_s, q_1, ..., q_t$ базис L_2. Система векторов

$e_1, ..., e_m, f_1, ..., f_s, q_1, ..., q_t$ **(2)**

порождает $L_1 + L_2$ по Т5 и она линейно независима,

т. к если $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i = \theta$, **(3)** то

$$q = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i - \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i \quad \textbf{(4)}$$

=> вектор $q \in L_1 \cap L_2$ => q – линейная комбинация векторов $f_1, ..., f_s$. Из единственности разложения вектора q по линейно независимой системе векторов $e_1, ..., e_m, f_1, ..., f_s$ => в (4) $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$ => в (3) в силу линейной независимости $f_1, ..., f_s, ..., q_1, ..., q_t$: $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$, $\gamma_1 = \ldots = \gamma_t = 0 = 0$ => только тривиальная линейная комбинация векторов (2) = θ => векторы (2) образуют базис $L_1 + L_2$ => $\dim(L_1 + L_2) = m+s+t$. **(5)**

Согласно схеме построения векторов (2),

$\dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2 = (m + s) + (s + t) - s$ => сравнение с (5) дает (1).

Если $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, док–во ан–но, но в нем не участвуют векторы $f_1, ..., f_s$.

---

*: *Непустое подмножество L пр–ва V является линейным подпространством этого пр–ва ⇔ имеют место импликации:*

1) $a, b \in L$ => $a+b \in L$, 2) $a \in L, \alpha \in \mathbb{R}$ => $\alpha a \in L$

**: (о неполном базисе). *В n–мерном пр–ве ∀ линейно независимую систему из k, где k < n, векторов можно дополнить до базиса.*

4. Прямая сумма линейных пространств.

Сумма подпространств линейного пр–ва называется ***прямой суммой*** ($L_1 \oplus \ldots \oplus L_k$), если разложение ∀ вектора в ней по слагаемым подпространствам единственно.

T1 (критерии прямой суммы). *Для подпространств $L_1,..., L_k$ конечномерного линейного пр–ва V следующие утверждения равносильны:*

1) *сумма подпространств $L_1,...,L_k$ – прямая;*
2) *совокупность базисов подпространств $L_1,...,L_k$ линейно независима;*
3) *совокупность базисов подпространств $L_1,...,L_k$ образует базис суммы $\sum_{i=1}^{k} L_i$;*
4) $\dim \sum_{i=1}^{k} L_i = \sum_{i=1}^{k} \dim L_i$;
5) ∃ *вектор $a \in \sum_{i=1}^{k} L_i$, для которого разложение по подпространствам $L_1,...,L_k$ единственно;*
6) ∀ *система ненулевых векторов $a_1, ..., a_k$, взятых по одному из каждого $L_i, i = \overline{1,k}$, линейно независима;*
7) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ (*для k = 2*).

Док–во. 1 => 2. Пусть совокупность $e_1, ..., e_m, f_1, ..., f_s, ..., q_1, ..., q_t$ базисов подпространств $L_1,...,L_k$ линейно зависима и

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i + \cdots + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i = \theta \qquad \textbf{(1)}$$

$$\text{где} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{s} \beta_i^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^2 \neq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

$$\text{Пусть } x_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i, \quad x_2 = \sum_{i=1}^{s} \beta_i f_i, \quad \ldots, x_k = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i q_i$$

$x_i \in L_i, i = \overline{1,k}$, причем среди $x_1, \ldots, x_k$ в силу (2) и линейной независимости векторов ∀ базиса ∃ $x_i \neq \theta$ => (1) можно записать $\theta = x_1 + \ldots + x_k$, $x_i \neq \theta$ **(3)**

Это дает 2–е разложение θ (кроме $\theta = \theta + ... + \theta$) по подпространствам $L_1,...,L_k$.

2 => 1. Пусть $L_1,..., L_k$ – не прямая сумма => ∃ b из этой суммы, который имеет 2 разложения по $L_1,...,L_k$:

$b = b_1 + ... + b_k$, $b = b_1' + ... + b_k'$, **(4)**

которые отличаются хотя бы 1 слагаемым. Если вычесть из 1–го равенства 2–е и разложить каждое слагаемое $b_j - b_j'$ по базису L_j, получим нетривиаль–ную линейную комбинацию базисных векторов пр–тв $L_1, ..., L_k$, равную θ. Это противоречит линейной независимости совокупности базисов $L_1, ..., L_k$.

2 <=> 3. Это следует из теоремы (*Сумма линейных подпространств есть линейная оболочка совокупности базисов слагаемых подпространств)*.

3 <=> 4. Эти утверждения отличаются только терминологией.

1 => 5. Очевидно.

5 => 1. Пусть $L_1 + ... + L_k$ – не прямая сумма => ∃ вектор b из этой суммы, для которого имеют место 2 различных разложения (4). Вычитая, получим нетривиальное разложение 0–го вектора (3). Если его сложить с разложением вектора a, то получим еще одно разложение вектора a.

1 => 6. Пусть система векторов $a_1,..., a_k$, где $a_i \in L_i$, $a_i \neq \theta, i = \overline{1,k}$, линейно зависима => ∃ числа $\alpha_1,..., \alpha_k \in P$, одновременно ≠0 (пусть $\alpha_i \neq 0$) : $\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_i a_i + ... + \alpha_k a_k = \theta$. Это дает 2–е разложение θ, отличное от тривиального (т.к. $\alpha_i a_i \neq \theta$) => противоречие с п.1.

6 => 1. Пусть $L_1 + ... + L_k$ – не прямая сумма, тогда ∃ вектор b, для которого имеют место 2 разложения (4). Вычитая, получим $a_{i_2} + \cdots + a_{i_q} = \theta$, где $a_{i_m} = b_{i_m} - b'_{i_m} \neq \theta, a_{i_m} \in L_{i_m}, m = \overline{1,q}$ => векторы $a_{i_2}, \ldots, a_{i_q}$ линейно зависимы => ∀ система ненулевых векторов, взятых по одному из каждого $L_i, i = \overline{1,k}$, содержащая эти векторы, линейно зависима в силу теоремы (*Если подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима*). Это противоречит 6.

4 <=> 7. Это следует из теоремы (*Для ∀ 2 линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пр–ва V* : $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2$.) •

T2. *Линейное пр–во V является прямой суммой своих подпространств L_1 и L_2 ⇔:*

1) $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$ 2) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$

Док–во. Необх–сть из Т1 (утверждения 4,7).

Дост–сть. Из условия 2 => $L_1 + L_2$ – прямая сумма. Пусть $L = L_1 \oplus L_2$. По Т1 (У4) $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$ => в силу условия 1: $\dim V = \dim L$ => $L = V$ (*Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пр–ва. Подпространство той же размерности, что и все пр–во, совпадает с пр–вом*), т.е. $V = L_1 \oplus L_2$. •

Пусть L – линейное подпространство пр–ва V. Подпространство L^{σ} называется ***дополнительным подпространством*** *к L*, если $L \oplus L^{\sigma} = V$ => L – дополнительное подпространство к L^{σ}.

T3. *Для ∀ подпространства L линейного пр–ва V ∃ дополнительное подпространство.*

Док–во. Если $L = \{\theta\}$, то $L^{\sigma} = V$, а если $L = V$, то $L^{\sigma} = \{\theta\}$. Пусть L – нетривиальное подпространство. Пусть $e_1,..., e_k$ – базис L. Дополним его до базиса $e_1,..., e_k, e_{k+1},..., e_n$ всего пр–ва V => $\mathcal{L}(e_{k+1},..., e_n) = L^{\sigma}$, т.к. для подпространства $\mathcal{L}(e_{k+1},..., e_n)$ выполнены все условия Т2. •

5. Евклидово и унитарное пространство. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пр–во. Отображение $(\, , \,): \ V \times V \to P$ называется ***скалярным произведением***, если оно удовлетворяет ***аксиомам***: для $\forall \, x, y, z \in V$ и $\forall \, \alpha \in P$

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)
2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$ **(1)**
4) $(x, x) \geq 0$ для $\forall \, x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Число (x, y) называется ***скалярным произведением*** *векторов x и y*.

Вещественное линейное пр–во со скалярным произведением называется ***евклидовым пространством E***, комплексное – ***унитарным V***.

Из определения скалярного произведения => св–ва:

1°. $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$, $\forall x,y,z \in E\,(U)$.
2°. $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$, $\forall x, y \in E\,(U)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$.
3°. $(\theta, x) = (x, \theta) = 0$ $\forall x \in E\,(U)$
4°. $(x, y) = 0$ для $\forall \, y \in E\,(U) \Leftrightarrow x = \theta$.
5° . $\forall$ подпространство L евклидова (унитарного) пр–ва является евклидовым (унитарным) пр–вом.

Скалярное произведение (x, y) векторов x, y линейно по 1–му аргументу, а в евклидовом пр–ве – по обоим (св–ва 1°, 2°).

Т1. *Для $\forall x, y \in E\,(U)$ имеет место неравенство Коши–Буняковского*: $|(x, y)|^2 \leq (x, x)\,(y, y)$ **(2)**

или $\begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (x,y) & (y,y) \end{vmatrix} \geq 0$

Док–во. Пусть $x \neq \theta$ (для $x = \theta$ (2) – равенство). Для $\forall x, y \in E\,(U)$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ согласно (1) и св–вам 1°–4°:

$0 \leq (\alpha x - y, \alpha x - y) = (\alpha x, \alpha x) - (\alpha x, y) - (y, \alpha x) + (y, y) =$
$|\alpha|^2(x,x) - \alpha(x,y) - \overline{\alpha}(y,x) + (y,y)$ **(3)**

$x \neq \theta$ => $(x, x) \neq 0$. Пусть $\alpha = (y, x)/(x, x)$ => из (3) имеем

$$0 \leq \frac{|y,x|^2}{(x,x)^2}(x,x) - \frac{(y,x)(x,y)}{(x,x)} - \frac{(x,y)(y,x)}{(x,x)} + (y,y)$$

=> после очевидных преобразований получим (2). •

З. Неравенство К–Б в евклидовом пр–ве:

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Т2. *Неравенство К–Б обращается в равенство $\Leftrightarrow$ векторы x и y коллинеарны.*

Док–во содержится в док–ве Т1: если $x = \theta$, то $x = 0y$. Если $x \neq \theta$, то (3) обращается в равенство $\Leftrightarrow$
$0 = (\alpha x - y, \alpha x - y)$, т.е. когда $y = \alpha x$. •

В евклидовом и унитарном пр–вах ***длина*** вектора x : $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Из аксиом скалярного произведения =>

1°. $\forall$ вектор x евклидова (унитарного) пр–ва имеет длину, при этом $|x| \geq 0$, $\forall x \in E\,(U)$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.
2°. $|\alpha x| = |\alpha||x|$, $\forall x \in E\,(U)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$.

Неравенство Коши–Буняковского в новой терминологии: $|(x,y)| \leq |x| \cdot |y|$ **(4)**

Вектор единичной длины называется ***нормированным***. $\forall$ ненулевой вектор можно нормировать, поделив его на его длину.

Т3.*В евклидовом (унитарном) пр–ве для $\forall$ x, y* :

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \qquad \textbf{(5)}$$

Док–во. $|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + +(y,x) + (y,y)$.

Применив числовые неравенства треугольника, с учетом (4) :

$$|x+y|^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$
$$|x+y|^2 \geq |x|^2 - 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| - |y|)^2$$

=> (5). •

Неравенства (5) называются ***неравенствами треугольника в евклидовом (унитарном) пр–ве***.

В евклидовом пр–ве ***углом*** между ненулевыми векторами x и y называется угол φ, $0 < \varphi < \pi$:

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$$

В унитарном пр–ве понятие угла между векторами не определено.

6. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Существование ОНБ.

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пр–во. Отображение $(\, , \,): \ V \times V \to P$ называется ***скалярным произведением***, если оно удовлетворяет аксиомам: для $\forall \, x, y, z \in V$ и $\forall \, \alpha \in P$

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)
2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ 3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$
4) $(x, x) \geq 0$ для $\forall \, x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Число (x, y) называется ***скалярным произведением*** *векторов x и y*. 2 вектора $x, y \in E\,(U)$ называются ***ортогональными***, если $(x, y) = 0$. Из св–ва ($(x, y) = 0$ для $\forall \, y \in E\,(U) \Leftrightarrow x = \theta$) => только 0–й вектор θ, ортогонален $\forall$ вектору пр–ва. В евклидовом пр–ве вследствие $\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|}$ ортогональность векторов x и y означает, что либо один из них 0–й, либо угол между ними = $\pi/2$.

Система векторов $x_1,..., x_k \in E\,(U)$ – ***ортогональная***, если $(x_i , x_j) = 0$ при $i \neq j$ **(1)**

Система $x_1,..., x_k \in E\,(U)$ – ***ортонормированная***, если

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Т1. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Док–во. Пусть $x_1,..., x_k \in E\,(U)$ – ортогональная система ненулевых векторов. Умножая обе части равенства $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_i x_i + ... + \alpha_k x_k = \theta$ **(3)** скалярно на x_i , получаем по (1) $\alpha_i\,(x_i , x_i) = 0$, $i = \overline{1,k}$. По условию $x_i \neq \theta$ => $(x_i , x_i) \neq 0$ => в (3) все $\alpha_i = 0$ => векторы системы линейно независимы. •

С1. *Ортонормированная система векторов линейно независима.*

С2. *В n–мерном евклидовом (унитарном) пр–ве $\forall$ ортонормированная система из n векторов образует базис.*

Базис, векторы которого образуют ортонормирован–ную систему, называется ***ортонормированным базисом*** **(ОНБ)**. Из (2) => $e_1,..., e_k$ – ОНБ $E\,(U)$, если $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ **(4)**

Т2. *В евклидовом (унитарном) пр–ве координаты $x_1,..., x_n$ вектора x в базисе $e = (e_1, ..., e_n)$ вычисляются по правилу* $x_i = (x, e_i)$, $i = \overline{1,n}$ **(5)** $\Leftrightarrow$ *e – ОНБ.*

Док–во. Необ–сть. Пусть для $\forall \, x \in E\,(U)$ координаты в базисе e вычисляются по (5) => по (5) вычисляются координаты и базисных век-торов: $e_i = 0e_1 + ... + 0e_{i-1} + 1e_i + 0e_{i+1} + ... + 0e_n$, $i = \overline{1,n}$. Сравнение координат e_i с (5) приводит к (4).

Дост–сть. Если e – ОНБ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, то св–во линейности скалярного произведения с учетом (4) приводит к (5). •

Т3. *В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, *заданных своими координатами в базисе e, вычисля–ется по правилу* $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$ **(6)** $\Leftrightarrow$ *e – ОНБ.*

Док–во. Необх–сть. Если скалярное произведение вычисляется согласно (6) для $\forall$ пары векторов, то это же верно для пары базисных векторов e_i и e_j, координаты которых известны. Применив правило (6) для вычисления (e_i, e_j), получим равенства (4).

Дост–сть. Если e – ОНБ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,
$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ => в силу свойства линейности скалярного произведения имеем

$$(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i , \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y_j} (e_i, e_j) = = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \quad \blacksquare$$

З. В евклидовом пр–ве черту в (6) можно опустить: $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Т4. *В конечномерном евклидовом (унитарном) пр–ве $\exists$ ОНБ.*

Док–во (по индукции). Пусть $\dim V = n$. При $n = 1$ можно взять любой вектор $f \neq \theta$ и положить $e_1 = f\,/|f|$.

Пусть в $\forall$ $(n-1)$–мерном евклидовом (унитарном) пр–ве $\exists$ ОНБ. Пусть $f_1, ..., f_n$ – базис $E\,(U)$. Линейная оболочка $\mathcal{L}\,(f_1,..., f_{n-1})$ является $(n-1)$–мерным пр–вом, и в нем по индуктивному предположению $\exists$ ОНБ $e_1,..., e_{n-1}$. Т.к. $f_n \notin \mathcal{L}\,(f_1,..., f_{n-1}) = \mathcal{L}\,(e_1,..., e_{n-1})$, то вектор $g_n = f_n - \alpha_1 e_1 - ... - \alpha_{n-1} e_{n-1} \neq \theta$ при $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$. Выберем коэффициенты α_i, $i = \overline{1, n-1}$, из условия ортогональности вектора g_n всем векторам $e_1,..., e_{n-1}$: $0 = (g_n, e_i) = (f_n, e_i) - \alpha_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда, положив
$e_n = g_n /|\, g_n|$, получим ОНБ $e_1,..., e_n$ пр–ва $E\,(U)$. •

7. Изометрия.

2 линейных пр–ва V_1 и V_2 над общим полем P называются ***изоморфными*** ($V_1 \cong V_2$), если ∃ биективное отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, которое сохраняет законы композиции, т.е. если для ∀ $x, y \in V_1$ и ∀ числа $\alpha \in P$

1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ 2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

Само отображение φ называется ***изоморфизмом линейных пространств***.

Свойства изоморфных пр–тв:

1°. *Отношение изоморфизма есть отношение эквивалентности на множестве всех линейных пр–тв над полем P.*

2°. *В изоморфных пр–вах*

а) образ (и прообраз) линейной комбинации векторов есть линейная комбинация образов (прообразов) с теми же коэффициентами;

б) образ (и прообраз) нулевого вектора есть нулевой вектор;

в) образ (и прообраз) линейно независимой системы векторов образует линейно независимую систему;

г) образ (и прообраз) базиса есть базис.

Т (критерий изоморфизма). *2 линейных пр–ва над общим полем изоморфны ⇔ их размерности равны.*

Док–во. Необх–сть вытекает из св–ва "*г*" изоморфных пр–тв.

Дост–сть. Пусть V_1 и V_2 – линейные пр–ва над полем P и $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Пусть $e_1, ..., e_n$ – базис V_1,

$f_1, \dots, f_n$ – базис V_2 . Построим отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, : ∀ $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in V_1 \to y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in V_2$ (т.е. вектор y имеет те же координаты, что и x). Из единственности разложения вектора по базису => отображение φ биективно. И φ – изоморфизм, т.к. координаты вектора обладают св–вом линейности. •

Евклидовы пр–ва E_1 и E_2 называются ***изоморфными***, если ∃ биективное отображение $\varphi: E_1 \to E_2$, которое сохраняет законы композиции и скалярное произведение:

1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \forall x, y \in E_1$

2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x), \forall x \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

3) $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y), \ \forall x, y \in E_1$

Само отображение φ называется ***изоморфизмом евклидовых пространств*** или ***изометрией***.

Для унитарных пространств все также, но в св–ве 2: $\alpha \in \mathbb{C}$. Из определения => изоморфные евклидовы (унитарные) пр–ва изоморфны как линейные пр–ва.

Т1. *Два евклидовых (унитарных) пр–ва изоморфны ⇔ равны их размерности.*

Док–во. Необх–сть вытекает из изоморфизма евклидовых (унитарных) пр–тв как линейных пр–тв.

Дост–сть. Пусть V_1 , V_2 – оба евклидовы (оба унитарные) пр–ва и пусть $\dim V_1 = \dim V_2 = n$. Выберем в V_1 и V_2 ОНБ $e_1, ..., e_n$ и $e_1', ..., e_n'$. Построим отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, поставив в соответствие каждому вектору $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V_1$ вектор $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i'$. Из док–ва критерия изоморфизма => отображение φ – изоморфизм линейных пр–тв V_1 и V_2. Оно сохраняет скалярное произведение, т.к. если $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i'$, то

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i, \quad (\varphi(x), \varphi(y)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$$

согласно теореме (*В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ *, заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу* $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ ⇔ *e – ОНБ*) :

8. Матрица Грама. Критерий линейной зависимости.

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пр–во. Отображение (,) : $V \times V \to P$ называется ***скалярным произведением***, если оно удовлетворяет аксиомам: для ∀ $x, y, z \in V$ и ∀ $\alpha \in P$

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)

2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ 3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$

4) $(x, x) \geq 0$ для ∀ $x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Матрицей Грама *системы векторов* $a_1, ..., a_k$ евклидова (унитарного) пр–ва называется матрица

$$G(a_1, \dots, a_k) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_k, a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_1, a_k) & \cdots & (a_k, a_k) \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Определитель матрицы Грама называется ***определителем Грама***.

Т1. *Система векторов* $a_1, ..., a_k$ *евклидова* (*унитар–ного*) *пр–ва линейно зависима* ⇔ $\det G(a_1, ..., a_k) = 0$.

Док–во. Необх–сть. Пусть $a_1, ..., a_k$ – линейно зависимая система векторов. Последовательно умножая нетривиальную линейную комбинацию

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta \qquad \textbf{(2)}$$

скалярно на векторы $a_1, ..., a_k$, получим однородную систему уравнений относительно $\alpha_1, ..., \alpha_k$:

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \cdots + \alpha_k(a_k, a_1) = 0, \\ \qquad \ldots \\ \alpha_1(a_1, a_k) + \cdots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

с матрицей коэффициентов $G(a_1, ..., a_k)$. Т.к. ∃ нетривиальное решение этой системы (*Однородная система Ax=0 с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение* ⇔ $|A| = 0$) => $\det G(a_1, ..., a_k) = 0$.

Дост–сть. Пусть $\det G(a_1, ..., a_k) = 0$=> (3) имеет нетривиальное решение $a_1, ..., a_k$. Перепишем ее:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i, a_1\right) = 0, \\ \qquad \ldots \\ \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i, a_k\right) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

=> вектор $g = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \in \mathcal{L}(a_1, ..., a_k)$ и ортогонален $\mathcal{L}(a_1, ..., a_k)$ => по аксиоме 4 скалярного произведе–ния вектор g может быть только 0–м => для $a_1, ..., a_k$ имеет место (2) => с учетом нетривиальности набора $\alpha_1, ..., \alpha_k$ следует линейная зависимость $a_1, ..., a_k$. •

$A^H = (a_{ij}^h)$ – сопряженная к $A = (a_{ij})$: $a_{ij}^h = \overline{a}_{ji}$

Матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называется ***эрмитовой*** *матрицей,* если $A^H = A$. **(5)**

=> $|A| \in \mathbb{R}$

Матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется ***симметрической*** (или ***вещественной эрмитовой***), если $A^T = A$. **(6)**

Т2. *Матрица Грама системы векторов евклидова* (*унитарного*) *пр–ва эрмитова.*

Док–во. Пусть $G(a_1, ..., a_k) = G = (g_{ij})$. Из (1) => $g_{ij} = (a_j, a_i)$, $g_{ji} = (a_i, a_j)$, т.е. $g_{ij} = \overline{g}_{ji}$ => $G^H = G$, в вещественном случае, $G^T = G$. •

Т3. *Определитель Грама линейно независимой системы векторов в евклидовом (унитарном) пр–ве положителен.*

Док–во. Пусть $a_1, ..., a_k$ – линейно независимая система векторов евклидова пр–ва => $\dim \mathcal{L}(a_1, ..., a_k) = k$. Выберем ОНБ $e_1, ..., e_k$ линейной оболочки $\mathcal{L}(a_1, ..., a_k)$. Составим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

столбцы – координаты векторов $a_1, ..., a_k$ в базисе $e = (e_1, ..., e_k)$ => (по Т: *В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ *, заданных координатами в базисе e, вычисляется по* $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ ⇔ *e – ОНБ*)

$$(a_i, a_j) = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} \overline{a_{si}} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}^h a_{sj} = \{A^H A\}_{ij}, \quad i, j = \overline{1, k}$$

=> $G(a_1, ..., a_k) = A^H A$ и $\det G(a_1, ..., a_k) = |\det A|^2$ => $\det G(a_1, ..., a_k) \geq 0$. Т.к. система $a_1, ..., a_k$ линейно независима => по Т1 $\det G(a_1, ..., a_k) \neq 0$ => $\det G(a_1, ..., a_k) > 0$

З. В вещественном случае $G(a_1, ..., a_k) = A^T A$.

9. Ортогональное дополнение. Ортогональная сумма подпространств. Расстояние от вектора до подпространства.

Пусть L – линейное подпространство евклидова (унитарного) пр–ва E (U). Вектор x называется ***ортогональным к подпространству*** L ($x \perp L$), если он ортогонален $\forall y \in L$.

$x \perp \mathcal{L}(a_1,\dots,a_k) \Leftrightarrow x \perp a_i$, $i=\overline{1,k}$. Совокупность всех векторов $x \in E(U)$, ортогональных подпространству L, называется ***ортогональным дополнением*** $L^\perp$ к L.

Т 1. *Ортогональное дополнение к подпространству является линейным подпространством.*

Док–во. Пусть $y_1, y_2 \in L^\perp$, тогда $(y_1, x) = (y_2, x) = 0$ для $\forall x \in L$. Складывая эти равенства => $(y_1+y_2, x) = 0$, $\forall x \in L \Rightarrow y_1+y_2 \in L^\perp$. Если $(y,x) = 0, \forall x \in L$, то $(\alpha y, x) = 0 \Rightarrow \alpha y \in L^\perp \Rightarrow L^\perp$ – линейное подпространство по Т (*Непустое подмножество L пр–ва V является линейным подпространством этого пр–ва ⇔ имеют место импликации:1) $a, b \in L \Rightarrow a+b \in L$, 2) $a \in L$, $\alpha \in R \Rightarrow \alpha a \in L$*) •

Т2. *Если L – линейное подпространство E (U), то* $L \oplus L^\perp = E(U)$ **(1)**

Док–во. Для тривиального подпространства очевидно. Пусть L – нетривиальное подпространство. Возьмем $e_1,\dots,e_k$ – ОНБ L, $e_{k+1},\dots,e_n$ – ОНБ $L^\perp$. Система векторов $e_1,\dots,e_k, e_{k+1},\dots,e_n$ ортонормирована => линейно независима (Т (*Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима*)). Покажем, что она образует базис всего пр–ва E (U). Пусть это не так. Тогда ∃ вектор f пр–ва, который не является линейной комбинацией $e_1,\dots, e_n$. Система векторов $e_1,\dots, e_n$, f линейно независима, и применение процесса ортогонализации приводит к вектору e_{n+1}, который ортогонален $e_1,\dots, e_n$ и, значит, $e_{n+1} \in L^\perp$. С другой стороны, $e_{n+1} \perp L^\perp$, т.к. e_{n+1} ортогонален $e_{k+1},\dots,e_n \Rightarrow e_{n+1} = \theta \Rightarrow$ линейная зависимость $e_1,\dots, e_n, f$, что противоречит допущению. Т.о., система $e_1,\dots, e_n$ является базисом E (U) и $\dim L + \dim L^\perp = \dim E(U)$.Т.к. $L \cap L^\perp = \{\theta\}$, то получаем (1) по Т (*Линейное пр–во V является прямой суммой своих подпространств L_1 и L_2* ⇔:1) $\dim V = \dim L_1 + \dim L_2$; 2) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$). •

С. *Если L – линейное подпространство E (U), то для $\forall f \in E(U)$ ∃ ! разложение (где $g \in L$, $h \perp L$):*

$$f = g + h \qquad \textbf{(2)}$$

Вектор g в (2) – ***ортогональная проекция*** *вектора f на L (перпендикуляр, опущенный из вектора f на L*), вектор h – ***ортогональная составляющая*** *вектора f*, вектор f – ***наклонная*** *к подпространству L*.

$$|f|^2 = (g+h, g+h) = (g,g) + (h,h) \Rightarrow$$

$|f|^2 = |g|^2 + |h|^2$ **(3)** – *теорема Пифагора в евклидовом (унитарном) пр–ве*

Множество M называется ***метрическим пр–вом***, если задано отображение $\rho: M \times M \to \mathbb{R}$, которое каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in M$ ставит в соответствие число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$ такое, что:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in M$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in M$
3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ $\forall x, y \in M$.

Число $\rho(x, y)$ – ***расстояние между x и y***; отображение ρ – ***метрика***, аксиомы 1–3 – ***аксиомы метрики***. ***Расстоянием между множествами X и Y*** в метрическом пр–ве называется число

$$\rho(X,Y) = \inf_{x\in X, y\in Y} \rho(f,y)$$

Т3. *В евклидовом (унитарном) пр–ве V правило $\rho(x,y) = |x-y|$ задает метрику.*

Док–во. Правило определяет отображение ρ: $V\times V\to\mathbb{R}$, которое отвечает всем аксиомам метрики. Например: $\rho(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$. •

Т4 (о кратчайшем расстоянии). *Расстояние между вектором f и линейным подпространством L в евклидовом (унитарном) пр–ве равно длине перпендикуляра, опущенного из вектора f на L*.

Док–во. Пусть $f = g + h$, где $g \in L$, $h \perp L$, $\forall y \in L \Rightarrow \rho(f,y) = |f-y| = |(g+h)-y| = |h+(g-y)| =$
$=$\{в силу(3)\}$= \sqrt{|h|^2+|g-y|^2} \Rightarrow \rho(f,y) \geq |h|$, $\forall y \in L$ и $\rho(f,y) = |h|$, если $y = g \Rightarrow$

$$|h| = \inf_{y\in L} \rho(f,y) = \rho(f,L) \quad \blacksquare$$

Т4 в других терминах:

1) *расстояние между вектором f и подпространством L, равно расстоянию между вектором f и его ортогональной проекцией на L;*
2) *среди всех векторов подпространства L ближе всего к вектору f расположена его ортогональная проекция на L*.

10. Ортонормированный базис и унитарные (ортогональные) матрицы.

2 вектора $x, y \in E(U)$ ***ортогональны***, если $(x, y) = 0$.

Система векторов $x_1,\dots, x_k \in E(U)$ ***ортогональна***, если $(x_i, x_j) = 0$ при $i\neq j$ **(1)**

Система $x_1,\dots, x_k \in E(U)$ ***ортонормированная***, если

$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ **(2)**

Т1. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Док–во. Пусть $x_1,\dots, x_k \in E(U)$ – ортогональная система, $x_i \neq \theta$. Умножая скалярно на x_i равенство

$\alpha_1 x_1 +\dots+ \alpha_i x_i +\dots+ \alpha_k x_k = \theta$ **(3)**, получаем в силу (1) $\alpha_i (x_i, x_i) = 0$, $i=\overline{1,k}$. По условию $x_i \neq \theta \Rightarrow (x_i, x_i) \neq 0 \Rightarrow$ все $\alpha_i = 0 \Rightarrow$ система линейно независима. •

Сл1. *Ортонормированная система векторов линейно независима.*

Сл2. *В n–мерном евклидовом (унитарном) пр–ве ∀ ортонормированная система из n векторов образует базис.*

Базис, векторы которого образуют ортонормирован–ную систему, называется ***ортонормированным базисом*** **(ОНБ)**. Из (2) => $e_1,\dots, e_k$ – ОНБ $E(U)$, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ **(4)**

Т2. *В евклидовом (унитарном) пр–ве координаты $x_1,\dots, x_n$ вектора x в базисе $e = (e_1,\dots, e_n)$ вычисляются по правилу* $x_i = (x, e_i)$, $i=\overline{1,n}$ **(5)** *⇔ e – ОНБ.*

Док–во. Необх–сть. Пусть для $\forall x \in E(U)$ координаты в базисе e вычисляются согласно (5) => по (5) вычисляются координаты и базисных векторов: $e_i = 0e_1 + \dots + 0e_{i-1} + 1e_i + 0e_{i+1} + \dots + 0e_n$, $i=\overline{1,n}$.

Сравнение координат вектора e_i с (5) приводит к (4).

Дост–сть. Если e – ОНБ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, то свойство линейности скалярного произведения с учетом (4) приводит к (5). •

Т3. *В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, *заданных своими координатами в базисе e, вычисля–ется по правилу* $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ **(6)** *⇔ e – ОНБ.*

Док–во. Необх–сть. Если скалярное произведение вычисляется по (6) для ∀ пары векторов, то это же верно для пары базисных векторов e_i и e_j, координаты которых известны. Применив правило (6) для вычисления (e_i, e_j), получим равенства (4).

Дост–сть. e – ОНБ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ => в силу линейности скалярного произведения:

$$(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i \overline{y_j}(e_i,e_j) = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i} \quad \blacksquare$$

$A^H = (a_{ij}^h)$ – сопряженная к $A = (a_{ij})$: $a_{ij}^h = \overline{a_{ji}}$

Матрица $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ***унитарна***, если $U U^H = U^H U = I$

Матрица $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ***ортогональна***, если $Q Q^T = Q^T Q = I$

Т4. *Матрица ортогональна (унитарна) ⇔ она является матрицей перехода от одного ОНБ к другому ОНБ евклидова (унитарного) пр–ва.*

Док–во. Пусть e, e' – 2 ОНБ. Векторы одного базиса можно выразить через векторы другого:

$e_1' = c_{11} e_1 + \dots + c_{n1} e_n$
…
$e_n' = c_{1n} e_1 + \dots + c_{nn} e_n$

=>столбцы матрицы перехода C являются координатами векторов базиса e' в базисе e. По Т3: $(e_i', e_j') = \sum_{k=1}^n c_{ki}\overline{c}_{ki}$ ⇔ e – ОНБ => условие ортонормированности базиса e' ⇔ условию ортогональности (унитарности) матрицы: $\sum_{k=1}^n c_{ki}\overline{c_{ki}} = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ и $\sum_{k=1}^n c_{ik}\overline{c_{jk}} = \begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

11. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. QR–разложение матрицы.

2 вектора $x, y \in E(U)$ ***ортогональны***, если $(x, y) = 0$.
Система векторов $x_1,..., x_k \in E(U)$ ***ортогональна***, если $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$ **(1)**
Система $x_1,..., x_k \in E(U)$ ***ортонормированная***, если
$(x_i, x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ **(2)**

Т1. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*
Док–во. Пусть $x_1,..., x_k \in E(U)$ – ортогональная система, $x_i \neq \theta$. Умножая скалярно на x_i равенство
$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_i x_i + ... + \alpha_k x_k = \theta$ **(3)**, получаем в силу (1) $\alpha_i (x_i, x_i) = 0$, $i = \overline{1,k}$. По условию $x_i \neq \theta$ => $(x_i, x_i) \neq 0$ => все $\alpha_i = 0$ => система линейно независима. •

***Сл*1**. *Ортонормированная система векторов линейно независима.*
***Сл*2.** *В n–мерном евклидовом (унитарном) пр–ве ∀ ортонормированная система из n векторов образует базис.*

Базис, векторы которого образуют ортонормирован–ную систему, называется ***ортонормированным базисом*** **(ОНБ)**. Из (2) => $e_1,..., e_k$ – ОНБ $E(U)$, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ **(4)**

Процесс ортогонализации. Пусть в евклидовом (унитарном) пр–ве задан базис $f_1,..., f_n$. По нему надо построить ОНБ $e_1,..., e_n$.
1–й шаг. Полагая $g_1 = f_1$, находим $e_1 = g_1/|g_1|$.
k–й шаг ($k \geq 2$). Полагаем $g_k = f_k - \alpha_1 e_1 - ... - \alpha_{k-1} e_{k-1}$, где $\alpha_i = (f_k, e_i)$, $i = \overline{1, k-1}$, и находим $e_k = g_k / |g_k|$.
Через n шагов получим ОНБ $e_1,...,e_n$ пр–ва. Описанный алгоритм состоит в следующем.

Матрица $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ***унитарна***, если $U U^H = U^H U = I$
Матрица $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ***ортогональна***, если $Q Q^T = Q^T Q = I$

Т4. *Матрица ортогональна (унитарна) ⇔ она является матрицей перехода от одного ОНБ к другому ОНБ евклидова (унитарного) пр–ва.*
Док–во. Пусть e, e' – 2 ОНБ. Векторы одного базиса можно выразить через векторы другого:
$e_1' = c_{11} e_1 + \ldots + c_{n1} e_n$
…
$e_n' = c_{1n} e_1 + \ldots + c_{nn} e_n$
=>столбцы матрицы перехода C являются координатами векторов базиса e' в базисе e. Согласно теореме (*В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, *заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу* $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$ ⇔ *e – ОНБ*): $(e_i', e_j') = \sum_{k=1}^n c_{ki} \overline{c_{ki}}$ ⇔ e – ОНБ => условие ортонормированности базиса e' ⇔ условию ортогональности (унитарности) матрицы:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ki}\overline{c_{ki}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\overline{c_{jk}} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

QR–разложение. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ имеет линейно независимые столбцы $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}^n$ и к ним применялся процесс ортогонализации Грама–Шмидта => в результате получаются ортонормированные векторы $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{C}^m$. $a_k \in \mathcal{L}(q_1,..., q_k)$, $k = \overline{1, m}$ => для каких–то чисел r_{ik}: $a_k = \sum_{i=1}^k r_{ik} q_k$ или:

$$A = QR, \quad Q = [q_1, \ldots, q_m], \qquad R = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & r_{mm} \end{bmatrix}$$

Разложение $\boldsymbol{A = QR}$, где Q имеет ортонормированные столбцы, а R – верхняя треугольная матрица, называется ***QR–разложением*** матрицы A.
=> *для ∀ прямоугольной матрицы с линейно незави–симыми столбцами существует QR– разложение.*

Т5. *∀ прямоугольная матрица, в которой число строк не меньше числа столбцов, обладает QR– разложением с верхней ступенчатой матрицей R.*
Док–во. Пусть a_{i_1} – 1–й ненулевой столбец матрицы A; a_{i_2} – 1–й столбец: $a_{i_2} \notin \mathrm{L}(a_{i_1})$; a_{i_3} – 1–й столбец: $a_{i_3} \notin \mathrm{L}(a_{i_1}, a_{i_2})$, и т.д. => получаем в A базисную систему столбцов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, обладающую св–вами: $a_j = 0$ при $j < i_1$;
$a_j \in \mathcal{L}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_l})$ при $i_l < j < i_{l+1}$, $l = 1,\ldots, r-1$; $a_j \in \mathcal{L}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r})$ при $i_r < j$
Найдем QR–разложение: $[a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}] = [q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}] R_r$.
Систему столбцов $q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}$ дополним до ОНБ в n–мерном пр–ве столбцов и из полученных столбцов составим матрицу Q, сохранив первоначальные столбцы в позициях $i_1, \ldots, i_r$.
Записав $A = QR$, видим, что в матрице R первые r элементов i_l–го столбца те же, что в l–м столбце матрицы R_r. В то же время, j–й столбец при $i_l < j < i_{l+1}$ имеет 0 в позициях ниже i_l–й.

12. Линейное афинное многообразие в линейном пр–ве. Гиперплоскость.
Пусть V – линейное пр–во, L – некоторое его подпро–странство, x_0 – некоторый вектор пр–ва V. Множество H всевозможных векторов вида $x_0 + x$, где $x \in L$, называется ***линейным аффинным многообразием*** *пр–ва V, полученным сдвигом L на вектор* x_0. x_0 – ***вектор сдвига***, а L – ***направляющее подпространство***:

$$H = x_0 + L = \{x_0 + x \mid x \in L\}. \ =>$$

1°. $x_0 \in H$, т.к. $x_0 = x_0 + \theta$, $\theta \in L$.
2°. *Разность двух векторов линейного многообразия принадлежит направляющему подпространству,* т.к. если $z_1 = x_0 + x$, $z_2 = x_0 + y$, $x, y \in L$, то $z_1 - z_2 = x - y \in L$.

Т1. *2 линейных многообразия* $H_1 = x_1 + L_1$ *и* $H_2 = x_2 + L_2$ *совпадают* ⇔ $L_1 = L_2 = L$ *и* $x_1 - x_2 \in L$.
Док–во. Необ–сть. Пусть $H_1 = H_2$ => $x_1 \in H_2$ и, в силу св–ва 2°, $x_1 - x_2 \in L_2$.
Покажем: $L_1 = L_2$. Для ∀ $x \in L_1$ имеем $x_1 + x \in H_1$. Т.к. $H_1 = H_2$, то ∃ $y \in L_2$: $x_1 + x =$
$= x_2 + y$ => $x = (x_2 - x_1) + y$, где $x_1 - x_2 \in L_2$, $y \in L_2$. =>
$x \in L_2$ и $L_1 \subset L_2$. Ан–но $L_2 \subset L_1$ => $L_1 = L_2$.
Дост–сть. $L_1 = L_2 = L$ *и* $x_1 - x_2 \in L$ => для $\forall z \in H_1$:
$z = x_1 + x$, где $x \in L$, или $z = x_2 + (x_1 - x_2) + x$, $x \in L$,.
Т. к. $x_1 - x_2 \in L$ и $x \in L$, то $(x_1 - x_2) + x \in L$ => $z \in H_2$ и $H_1 \subset H_2$. Ан–но $H_2 \subset H_1$ => $H_1 = H_2$. •

***С*1**. *Вектором сдвига может быть ∀ вектор линейного многообразия.*
Если x_1 – произвольный вектор линейного многообразия $H = x_0 + L$, то $x_1 - x_0 \in L$ и $H = x_1 + L$.
***С*2**. *Линейное многообразие может быть получено сдвигом единственного направляющего подпространства.* (вытекает из Т1).

Размерностью линейного многообразия ($\dim H$) называется размерность его на-правляющего подпро–странства. Линейное многообразие размерности 1 – ***прямая в линейном пр-ве***, размерности $(n - 1)$,
где $n = \dim V$, – ***гиперплоскость***, а размерности k,
$1 < k < n - 1$, – *k–мерная плоскость.*
Линейные многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ в пр–ве V ***параллельны***, если или $L_1 \subset L_2$, или $L_2 \subset L_1$.

Т2. *Если 2 линейных многообразия с непустым пересечением параллельны, то одно из них содержит другое.*
Док–во. Пусть $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ параллельны и пусть $L_1 \subset L_2$. По условию ∃ $x_0 \in H_1 \cap H_2$. Т.к. вектором сдвига может быть ∀ вектор линейного многообразия, то $H_1 = x_0 + L_1$ и $H_2 = x_0 + L_2$ => с учетом $L_1 \subset L_2$: $H_1 \subset H_2$. •
***С*3**. *Если линейные многообразия параллельны, то либо они не пересекаются, либо одно из них содержится в другом.*

Т3. *Непустое пересечение линейных многообразий* $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ *является линейным многообразием с направляющим подпространством* $L_1 \cap L_2$.
Док–во. По условию ∃ $x_0 \in H_1 \cap H_2$ => $H_1 = x_0 + L_1$ и $H_2 = x_0 + L_2$ => $H_1 \cap H_2 = x_0 + L_1 \cap L_2$, т.к. для этих множеств имеет место двустороннее вложение. •

Т4. *Всякое k–мерное линейное многообразие в n–мерном пр–ве можно задать в виде пересечения n – k гиперплоскостей.*
Док–во. Пусть $H = x_0 + L$ – k–мерное линейное многообразие и $e_1,..., e_k$ – базис L. Дополним его до базиса $e_1, ...,e_k, e_{k+1}, ...,e_n$ пр–ва V. В качестве искомых гиперплоскостей можно взять линейные многообразия $H_i = x_0 + L_i$, где $i = \overline{1, n-k}$, где L_i – линейная оболочка всех векторов базиса V, кроме e_{k+i}:
$L_i = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_{k+i-1}, e_{k+i+1} \ldots, e_n)$ => $L_1 \cap L_2 \cap \ldots \cap L_{n-k} =$
$\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k) = L$. По Т3 => $H = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_{n-k}$. Т.к. $\dim L_i = n - 1$, $i = \overline{1, n-k}$, то H_i – гиперплоскости. •

Т5. *Пересечение* $H = x_0 + L$ *с ∀ подпространством, дополнительным к L, состоит ровно из 1 вектора.*
Док–во. $L^б$ – дополнительное к L. Т.к. $L \oplus L^б = V$, то для x_0 ∃ разложение $x_0 = y + z$, где $y \in L$, $z \in L^б$ =>
$z = x_0 - y \in H$, ибо $-y \in L$ => z – общий вектор $L^б$ и H, т.е. $z \in L^б \cap H$.
Пусть $z' \in L^б \cap H$ => т.к. $z \in H$, $z' \in H$, то по св–ву 2° $z - z' \in L$, а т.к. $z \in L^б$, $z' \in L^б$, то $z - z' \in L^б$.
Из $L \cap L^б = \{\theta\}$ => $z - z' = 0$, т.е. $z = z'$. •

Пусть $H = x_0 + L$ – линейное многообразие в евкли–довом (унитарном) пр–ве. Вектор $n \in H$, $n \perp L$, – ***нормальный вектор линейного многообразия*** L.

Т6. *Для ∀ линейного многообразия в евклидовом (унитарном) пр–ве ∃ ! нормальный вектор.*
Док–во. Рассмотрим $H = x_0 + L$. Все векторы из H, ортогональные L, находятся в $H \cap L^\perp$, но $H \cap L^\perp$ состоит ровно из 1 вектора n, т.к. $L^\perp$ – дополнитель–ное к L (Т5 и (*Если L – линейное подпространство E (U), то* $L \oplus L^\perp = E(U)$)). Этот вектор n будет единственным нормальным вектором H. •

Т7. *Нормальный вектор линейного многообразия совпадает с перпендикуляром, опущенным из ∀ вектора линейного многообразия на направляющее подпространство.*
Док–во. Пусть n – нормальный вектор линейного многообразия $H = x_0 + L$ => $H = n + L$ => $\forall f \in H$ можно представить в виде $f = n + g$, $g \in L$. Т.к. $n \perp L$, то это соотношение совпадает с разложением вектора f на ортогональную проекцию g и перпендикуляр n. •
Сл. *Среди всех векторов линейного многообразия нормальный вектор имеет наименьшую длину.*

Пусть $H = x_0 + L$ – гиперплоскость в $E(U)$, т.е.
$\dim L = m - 1$, где m= $\dim E$ ($\dim U$) => $L^\perp$ – 1-мерное подпространство и его базис состоит из 1вектора n.
$x \in H$ ⇔ разность $x - x_0 \in L$, т.е. $(x - x_0, n) = 0$. **(1)**
=> (1) удовлетворяют все векторы x гиперплоскости H, и только они. (1) ⇔ $(x, n) = p$, где $p = (x_0, n)$ – фиксированное число для данной гиперплоскости.

Т8. *Пусть* $H = H = x_0 + L$ *– линейное аффинное многообразие в евклидовом (унитарном) пр–ве. Тогда* $\rho(f, H) = \rho(f - x_0, L)$.
=> из Т (*Расстояние между вектором f и линейным подпространством L в евклидовом (унитарном) пр–ве равно длине перпендикуляра, опущенного из вектора f на L*) и того, что для $\forall z = x_0 + y \in H$:
$\rho(f, z) = |f - z| = |(f - x_0) - y| = \rho(f - x_0, L)$, где $y \in L$. •

Т 9. *Пусть* $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ *– линейные аффинные многообразия в евклидовом (унитарном) пр–ве. Тогда* $\rho(H_1, H_2) = \rho(x_1 - x_2, L_1 + L_2)$.
=> из того, что для $\forall z_1 = x_1 + y_1 \in H_1$ и $z_2 = x_2 + y_2 \in H_2$: $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)| = \rho(x_1 - x_2, y)$,
где $y = y_1 - y_2 \in L_1 + L_2$ •

13. Линейные операторы (ЛО). Матрица ЛО.
V и W – линейные пр–ва над общим P. Отображение
$\mathcal{A}: V \to W$ **(1)** называется ***линейным оператором, действующим из V в W***, если для $\forall\, x, y \in V$, $\alpha \in P$
1) $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$; 2) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha\mathcal{A}x$.
Если $V = W$, то отображение $\mathcal{A}: V \to V$ называют ***линейным оператором, действующим в V***.
Если $W = P$, то отображение (1) называют ***линейной формой*** *или* ***линейным функционалом в пр–ве V***.
Множество всех ЛО, действующих из V в W: $\mathcal{L}(V, W)$.
ЛО $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ равны, если $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$, $\forall\, x \in V$.
Пр.1. M_n – пр–во вещественных многочленов степени $\le n$. ЛО *диффер–ния* $\mathcal{D}: M_n \to M_n$, : $\mathcal{D}\,p(t) = p'(t)$.
2. $V = L_1 \oplus L_2$. ЛО *проектирования пр–ва V на L_1 параллельно L_2* : $\mathcal{P}: V \to V$ по правилу $\mathcal{P}x = x_1$ для $x \in V$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$.
ЛО *отражения пр–ва V относительно L_1 параллельно L_2*: $\mathcal{R}: V \to V$ по правилу $\mathcal{R}x = x_1 - x_2$.
3. *Нулевой* ЛО $\mathcal{O}: V \to W$: $\forall\, x \in V$ переводит в $\theta \in W$.
4. *Тождественный* ЛО $\mathcal{I}: V \to V$, $\forall\, x \in V$ переводит в x.
Из определения => св–ва.
1°. *ЛО переводит 0–й вектор в 0–й вектор,* т.к.
$\mathcal{A}\theta_1 = \mathcal{A}(0x) = 0\mathcal{A}x = \theta_2$ ($\theta_1 \in V$ и $\theta_2 \in W$).
2°. *ЛО сохраняет линейные комбинации,* т.е. переводит линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами:
$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{A}x_i$$
3°. *ЛО сохраняет линейную зависимость,* т.е. переводит линейно зависимую систему в линейно зависимую.
Т1. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пр–ва V, а $q_1, \ldots, q_n$ – произвольные векторы пр–ва W. Тогда ∃ ! ЛО*
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, который переводит векторы $e_1, \ldots, e_n$ в векторы $q_1, \ldots, q_n$ соответственно.
Док–во. Построим искомый оператор, положив для
$\forall\, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$: $\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^n x_i q_i$ **(2)**
Из единственности разложения вектора x по базису => правило (2) однозначно определяет образ вектора x, причем $\mathcal{A}e_i = q_i$, $i = \overline{1,n}$. Из линейности координат => линейность построенного оператора.
Оператор $\mathcal{A}$ единствен, т.к. если $\mathcal{B}$ – ∀ другой ЛО, переводящий векторы $e_1, \ldots, e_n$ в векторы $q_1, \ldots, q_n$, то
$\mathcal{B}x = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{B}e_i = \sum_{i=1}^n x_i q_i = \mathcal{A}x$,
$\forall\, x \in V \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A}$ •
Сл. *ЛО $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ равны ⇔ они совпадают на векторах базиса V.*
Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ – базисы пр–тв V и W. Из Т1 => ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$. Но векторы $\mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1,n}$ однозначно определяются своими координатами в базисе f, т.е. коэффициентами разложений
$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 \ldots + a_{m1} f_m, \\ \mathcal{A}e_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 \ldots + a_{m2} f_m, \\ \qquad\ldots \\ \mathcal{A}e_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 \ldots + a_{mn} f_m \end{cases}$$
Матрица *оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов e* и f :
$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$
Из единственности разложения вектора по базису => при фиксированных e и f матрица ЛО определена однозначно.
Т2. *Пусть* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда ∃ взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m\times n}$.*
Док–во. Зафиксируем базисы $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ пр–тв V и W. Поставим в соответствие каждому ЛО
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ его матрицу A_{fe} в паре базисов e и f. Матрица $A_{fe} \in P^{m\times n}$ определена однозначно. Это отображение биективно, т.к. оно:
1) сюръективно, т.к. ∀ матрица $B = (b_{ij}) \in P^{m\times n}$ является матрицей ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$, переводящего векторы e_j в векторы $\sum_{i=1}^m b_{ij} f_i$, $j = \overline{1,n}$ (в силу Т1 такой оператор ∃);
2) инъективно, ибо различные операторы из $\mathcal{L}(V, W)$ не совпадают на базисных векторах и, значит, имеют разные матрицы. •
Отображение $f: X \to Y$ называется:
– *инъективным,* если из $x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$, т.е. $f(x) = y$ при $\forall\, y \in Y$ имеет не более 1 решения;
– *сюръективним,* если $\mathrm{im}\, f = Y$, т.е. $f(x) = y$ при $\forall\, y \in Y$ имеет хотя бы 1 решение;
– *биективным*, если оно инъективно и сюръективно, т.е. $f(x) = y$ при $\forall\, y \in Y$ имеет единственное решение.

14. Матрица ЛО при переходе к другому базису. Эквивалентность и подобие матриц.
Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ – базисы пр–ств V и W. Из теоремы (*Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пр–ва V, $q_1, \ldots, q_n$ – произвольные векторы пр–ва W. Тогда ∃ ! ЛО*
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, который переводит векторы $e_1, \ldots, e_n$ в векторы $q_1, \ldots, q_n$ соответственно) =>
ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$. Но векторы $\mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1,n}$ однозначно определяются своими координатами в базисе f, т.е. коэффициентами разложений
$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 \ldots + a_{m1} f_m, \\ \mathcal{A}e_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 \ldots + a_{m2} f_m, \\ \qquad\ldots \\ \mathcal{A}e_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 \ldots + a_{mn} f_m \end{cases} \qquad \mathbf{(1)}$$
Матрица *оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов e* и f :
$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$
Пусть ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_m)$ базисы пр–тв V и W.
Т1. *Если* $y = \mathcal{A}x$, *то* $y_f = A_{fe} x_e$ **(2)**
Док–во. $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^m y_i f_i$, $A_{fe} = (a_{ij})$. Утверждение (2) ⇔ $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, i = \overline{1,m}$. **(3)** Докажем их. Имеем $y = \mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \mathcal{A}e_j = \{\text{в силу (1)}\} = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) f_i$. Из единственности разложения вектора y по базису f => (3). •
Пусть e и $t = eC$ – два базиса пр–ва V с матрицей перехода C, а f и $s = fD$ – два базиса пр–ва W с матрицей перехода D. Одному и тому же ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ в паре базисов e и f соответствует матрица A_{fe} , а в паре базисов t и s – матрица A_{st}.
Т2. *Матрицы A_{fe} и A_{st} ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ в различных парах базисов связаны :* $A_{st} = D^{-1} A_{fe} C$ **(4)**
Док–во. Для $\forall\, x \in V$ и его образа $y = \mathcal{A}x$ в силу (2) : $y_f = A_{fe} x_e$ и $y_s = A_{st} x_t$ **.** Т.к. C и D – матрицы перехода, то $x_e = C x_t$, $y_f = D y_s$ => $D y_s = A_{fe} C x_t$ => $D A_{st} x_t = A_{fe} C x_t$. Т.к. это соотношение верно для $\forall\, x_t$, то $D A_{st} = A_{fe} C$. В силу невырожденности матрицы перехода => (4). •
2 матрицы A, B называются ***эквивалентными*** ($A \sim B$), если ∃ невырожденные матрицы P и Q : $A = PBQ$.
Квадратные матрицы A, B называются ***подобными***, если ∃ невырожденная матрица Q: $A = Q^{-1} B Q$.
***Сл*1.** *Матрицы ЛО в различных парах базисов эквивалентны.*
***Сл*2.** *Ранг матрицы ЛО не зависит от выбора базисов.*
Т3. 2 *матрицы A и B над полем P одинакового раз–мера $m\times n$ эквивалентны ⇔ они являются матрицами одного и того же ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, где V и W – линей–ные пр–ва над полем P размерностей n и m соот–но.*
Док–во. Необх–сть. Пусть $A, B \in P^{m\times n}$ и $B = D^{-1} A C$. Рассмотрим ∀ линейные пр–ва V и W над полем P : $\dim V = n$, $\dim W = m$. Возьмем в пр–ве V ∀ базис e, а в пр–ве W – базис f. В силу взаимно однозначного соответствия между $P^{m\times n}$ и $\mathcal{L}(V, W)$ (теорема: *Пусть* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда ∃ взаимно однозначное соответствие между линейными операторами из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m\times n}$*) ∃ ! ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, который в паре базисов e и f имеет матрицу A => согласно (4) матрица B будет матрицей этого же оператора в паре базисов $t = eC$ и $s = fD$.
Дост–сть рассмотрена в Т2. •
Если $W = V$, то при переходе от базиса e к $f = eQ$ матрица оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ изменяется по закону:
$A_f = Q^{-1} A_e Q$. Т.о., одному и тому же ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ соответствует целый класс матриц, подобных друг другу. Из Т3 => две матрицы $A, B \in P^{n\times n}$ подобны ⇔ они являются матрицами одного и того же ЛО, действующего в n–мерном пр–ве над полем P.

15. Линейное пр–во ЛО и матриц.

Суммой линейных операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ называется отображение $\mathcal{C}: V \to W$ по правилу $\forall x \in V$

$\mathcal{C}x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$, $\forall x \in V$: $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ **(1)**

Произведение линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ ***на число*** $\alpha \in P$ – это отображение $\mathcal{C}: V \to W$ по правилу $\mathcal{C}x = \alpha\mathcal{A}x$, $\forall x \in V$: $(\alpha\mathcal{A})x = \alpha\mathcal{A}x$, $\forall x \in V$. **(2)**

Т1. *Для* $\forall$ *операторов* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ *и числа* $\alpha \in P$: $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\alpha\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$

Док–во. Для $\forall x, y \in V$ согласно (1) имеем

$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x + y) = \mathcal{A}(x + y) + \mathcal{B}(x + y)$.

В силу линейности $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и аксиом линейного пр–ва

$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(x + y) = (\mathcal{A}x + \mathcal{A}y) + (\mathcal{B}x + \mathcal{B}y) = (\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) + (\mathcal{A}y + \mathcal{B}y) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})x + (\mathcal{A} + \mathcal{B})y$. Ан–но показать, что $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\lambda x) = \lambda((\mathcal{A} + \mathcal{B})x)$ для $\forall x \in V, \lambda \in P$ =>

$\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$

Так же доказывается, что $\alpha\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ •

***С* 1**. *Сложение операторов и умножение оператора на число являются внутренним и внешним законами композиции на множестве* $\mathcal{L}(V, W)$.

Аксиомы линейного пр-ва: $\forall a, b, c \in V$ и $\alpha, \beta \in P$

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \theta \in V: a + \theta = \theta + a = a$
4. для $\forall a \in V \ \exists -a \in V: a + (-a) = (-a) + a = \theta$
5. $1 \cdot a = a$
6. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $a(a + b) = \alpha a + \alpha b$

Т2. *Множество* $\mathcal{L}(V, W)$ *– линейное пр–во над полем P относительно введенных выше операций.*

Док–во. Проверить аксиомы линейного пр–ва, 0–ой элемент – 0–ое отображение $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(V, W)$, противоположный к $\mathcal{A}$ –отображение $-\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ по правилу $(-\mathcal{A})x = -\mathcal{A}x$, $\forall x \in V$. *Ассоциативность*. Для $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, W)$ и $\forall x \in V$: $((\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C})x = (\mathcal{A} + \mathcal{B})x + \mathcal{C}x = (\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) + \mathcal{C}x = \mathcal{A}x + (\mathcal{B}x + \mathcal{C}x)$,

$(\mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C}))x = \mathcal{A}x + (\mathcal{B} + \mathcal{C})x = \mathcal{A}x + (\mathcal{B}x + \mathcal{C}x)$ => $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C})$. •

Пусть $e = (e_1,...,e_n)$ и $f = (f_1,...,f_m)$ – базисы пр–тв V и W. Из Т (*Пусть* $e_1, ..., e_n$ *– базис пр–ва V, а* $q_1, ..., q_n$ *– произвольные векторы пр–ва W. Тогда* $\exists$! *ЛО*

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$*, который переводит векторы* $e_1, ..., e_n$ *в векторы* $q_1, ..., q_n$ *соответственно*) => ЛО

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $e_1,...,\mathcal{A}e_n$. Но векторы $\mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1,n}$ однозначно определяются своими координатами в f:

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 \dots + a_{m1} f_m, \\ Ae_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 \dots + a_{m2} f_m, \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 \dots + a_{mn} f_m \end{cases} \quad \mathbf{(3)}$$

Матрица *оператора* $\mathcal{A}$ *в паре базисов e* и f:

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\ a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{(4)}$$

2 линейных пр–ва V_1 и V_2 над общим полем P ***изоморфны*** ($V_1 \cong V_2$), если $\exists$ биективное отображение $\varphi: V_1 \to V_2$, которое сохраняет законы композиции, т.е. если для $\forall x, y \in V_1$ и $\forall$ числа $\alpha \in P$

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ 2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.

Т3. *Если* $\dim V = n$, $\dim W = m$, *то линейное пр–во* $\mathcal{L}(V, W)$ *изоморфно пр–ву матриц* $P^{m \times n}$.

Док–во. Зафиксируем базисы e и f пр–тв V и W. Построим отображение $\varphi: \mathcal{L}(V, W) \to P^{m \times n}$, положив $\varphi(\mathcal{A}) = A_{fe}$. Это отображение биективно в силу теоремы (*Пусть* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда* $\exists$ *взаимно однозначное соответствие между ЛО из* $\mathcal{L}(V, W)$ *и матрицами из* $P^{m \times n}$). Покажем, что оно сохраняет законы композиции, т.е. что

$(\mathcal{A} + \mathcal{B})_{fe} = A_{fe} + B_{fe}$, $(\alpha A)_{fe} = \alpha A_{fe}$ **(5)**

Пусть $A_{fe} = (a_{ij})$, $B_{fe} = (b_{ij})$ => согласно (3),

$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$, $\mathcal{B}e_j = \sum_{i=1}^m b_{ij} f_i$ =>

$(\mathcal{A} + \mathcal{B})e_j = \mathcal{A}e_j + \mathcal{B}e_j = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) f_i$.

По определению (4) отсюда => 1–е из (5). Ан–но проверяется 2–е соотношение. •

С2. $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$

16. Произведение ЛО и его матрица.

Пусть V, W, Z – линейные пр–ва над полем P. ***Произведением ЛО*** $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, Z)$ называется отображение $\mathcal{C}: V \to Z$ по правилу $\mathcal{C}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$, $\forall x \in V$: $(\mathcal{BA})x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$, $\forall x \in V$.

Т1. *Если* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(W, Z)$ *, то* $\mathcal{BA} \in \mathcal{L}(V, Z)$

Док–во. Линейность $\mathcal{BA}$: для $\forall x,y \in V$ *и* $\alpha \in P$

$(\mathcal{BA})(x+y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x+y)) = \mathcal{B}(\mathcal{A}x + \mathcal{A}y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) + \mathcal{B}(\mathcal{A}y) = = \mathcal{BA}x + \mathcal{BA}y$,

$(\mathcal{BA})(\alpha x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\alpha x)) = \mathcal{B}(\alpha(\mathcal{A}x)) = \alpha\mathcal{B}(\mathcal{A}x) = \alpha(\mathcal{BA}x) = = (\alpha\mathcal{BA})x$. •

Произведение ЛО определено не для любой пары ЛО. Но если это произведение имеет смысл, то:

1) $(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC})$ (ассоциативность);

2) $\alpha(\mathcal{AB}) = (\alpha\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{A}(\alpha\mathcal{B})$;

3) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$, $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$ (дистрибутивность).

Пусть $e = (e_1,...,e_n)$ и $f = (f_1,...,f_m)$ – базисы пр–тв V и W. Из Т (*Пусть* $e_1, ..., e_n$ *– базис пр–ва V, а* $q_1, ..., q_n$ *– произвольные векторы пр–ва W. Тогда* $\exists$! *ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$*, который переводит векторы* $e_1, ..., e_n$ *в векторы* $q_1, ..., q_n$ *соответственно*) => ЛО

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ однозначно определяется заданием векторов $\mathcal{A}e_1, ..., \mathcal{A}e_n$. Но $\mathcal{A}e_i$, $i = \overline{1,n}$ однозначно определяются коэффициентами разложений в f:

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 \dots + a_{m1} f_m, \\ Ae_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 \dots + a_{m2} f_m, \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f_2 \dots + a_{mn} f_m \end{cases} \quad \mathbf{(1)}$$

Матрица *оператора* $\mathcal{A}$ *в паре базисов e* и f:

$$A_{fe} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\ a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{(2)}$$

Т2. *При умножении ЛО их матрицы умножаются, т.е. если e, f, g – базисы пр–тв V, W, Z, то*

$$(\mathcal{BA})_{ge} = B_{gf} A_{fe} . \quad \mathbf{(3)}$$

Док–во. Пусть $A_{fe} = (a_{ij})$, $B_{gf} = (b_{ij})$, $(\mathcal{BA})_{ge} = (c_{ij})$,

$\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim Z = k$ => в силу (1)

$$\mathcal{BA}e_j = \textstyle\sum_{i=1}^k c_{ij} g_i \quad \mathbf{(4)}$$

В то же время $\mathcal{BA}e_j = \mathcal{B}(\mathcal{A}e_j) = \mathcal{B}\left(\sum_{s=1}^m a_{sj} f_s\right) =$

$= \sum_{s=1}^m a_{sj}(\mathcal{B}f_s) = \sum_{s=1}^m a_{sj} \sum_{i=1}^k b_{is} g_i =$

$$= \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^k a_{sj} b_{is} g_i = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{s=1}^m b_{is} a_{sj}\right) g_i$$

Сравнение этого разложения с (4) приводит к равенству $c_{ij} = \sum_{s=1}^m b_{is} a_{sj}$, которое означает (3).

17. Ядро и образ ЛО. Каноническая пара базисов.

Образ $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$: $\operatorname{im} \mathcal{A} = \{y \in W \mid \exists\, x \in V: \mathcal{A}x = y\}$ ***ядро*** $\mathcal{A}$: $\ker \mathcal{A} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \theta\}$

Пр. 1. В пр–ве многочленов M_n для оператора дифференцирования $\mathcal{D}$: $M_n \to M_n$: $(\mathcal{D}p(t) = p'(t))$:
$\operatorname{im} \mathcal{D} = M_{n-1}$, $\ker \mathcal{D} = M_0$.

2. $V = L_1 \oplus L_2$. ЛО *проектирования пр–ва V на L_1 параллельно L_2*: $\mathcal{P}: V \to V$ по правилу $\mathcal{P}x = x_1$ для $x \in V$ с разложением $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$.

ЛО *отражения пр–ва V относительно L_1 параллельно L_2*: $\mathcal{R}: V \to V$ по правилу $\mathcal{R}x = x_1 - x_2$.

Для оператора проектирования: $\operatorname{im} \mathcal{P} = L_1$, $\ker \mathcal{P} = L_2$

Для оператора отражения: $\operatorname{im} \mathcal{R} = V$, $\ker \mathcal{R} = \{\theta\}$

Т1. *Если* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, *то* $\ker \mathcal{A}$ *– линейное подпространство пр–ва V*, $\operatorname{im} \mathcal{A}$ *– линейное подпространство пр–ва W.*

для док–ва проверить условия Т (*Непустое подмножество L пр–ва V является линейным подпространством этого пр–ва $\Leftrightarrow$ имеют место импликации:* 1) $a, b \in L \Rightarrow a+b \in L$, 2) $a \in L$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha a \in L$).

Ранг ЛО – размерность его образа, ***дефект*** – размерность ядра: $\operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{im} \mathcal{A}$, $\operatorname{def} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A}$

Т2. *Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис пр–ва V, то*

$$\operatorname{im} \mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n) \quad \textbf{(1)}$$

Док–во. Для множеств (1) 2–стороннее вложение:

1)если $y \in \operatorname{im} \mathcal{A}$, то $y = \mathcal{A}x$ для некоторого $x \in V$, т.е. $y = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\ \mathcal{A}e_i \in \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n)$

2)если $y \in \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n)$, то $y = \sum_{i=1}^{n} x_i\ \mathcal{A}e_i = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \mathcal{A}x$, т.е. $y \in \operatorname{im} \mathcal{A}$. •

Т3. *Ранг ЛО равен рангу его матрицы в произвольной паре базисов.*

Док–во. Из Т2 и из $\dim \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k) = \operatorname{rg}(a_1, \ldots, a_k) \Rightarrow \operatorname{rg} \mathcal{A} = \dim \operatorname{im} \mathcal{A} = \dim \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n)$ Ранг системы векторов $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$ = рангу системы векторов, составленных из координат этих векторов в базисе f пр–ва W, т.е. рангу системы столбцов матрицы A_{fe} •

Т4 (о ранге и дефекте). *Если* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, *то*

$$\operatorname{rg} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = \dim V. \quad \textbf{(2)}$$

Док–во. Пусть $e_1, \ldots, e_k$ – базис $\ker \mathcal{A}$. Дополним его до базиса $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ пр–ва V. Согласно Т2

$\operatorname{im}\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_k, \mathcal{A}e_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n) = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n)$ Докажем, что $\mathcal{A}e_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}e_n$ линейно независимы. Пусть это не так => для нетривиальной линейной комбинации этих векторов:

$\alpha_{k+1}\mathcal{A}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n\mathcal{A}e_n = \theta \Rightarrow \mathcal{A}(\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n) = \theta \Rightarrow \alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n \in \ker \mathcal{A} \Rightarrow$ вектор $\alpha_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \alpha_n e_n$ линейно выражается через $e_1, \ldots, e_k$, что невозможно в силу линейной независимости $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$.
Т.о., $\dim \operatorname{im} \mathcal{A} = n - k$, $\dim \ker \mathcal{A} = k \Rightarrow (2)$. •

Т5. *Пусть* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $\operatorname{rg} \mathcal{A} = r$, $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда $\exists$ базисы e и f пр–тв V и W, в которых оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $I_r \in P^{m \times n}$, в которой все элементы равны* 0, *кроме первых r диагональных элементов, равных* 1.

Док–во. Возьмем $\forall$базисы t и s пр–тв V и W. Пусть A_{st} – матрица оператора $\mathcal{A}$ в паре базисов t и s => по Т3 $\operatorname{rg} A_{st} = r$. В силу теоремы (*Любая ненулевая матрица ранга r эквивалентна матрице I_r*) => матрицы A_{st} и I_r эквивалентны => по теореме (*Две матрицы A и B над полем P одинакового размера $m \times n$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одного и того ЛО*
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$*, где V и W – линейные пр–ва над полем P размерностей n и m соответственно.*) они являются матрицами одного ЛО => утверждение теоремы. •

Базисы e и f, в которых оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу I_r, называют ***канонической парой базисов***.

18. Линейные функционалы. Сопряженное пр–во. Линейные функционалы и гиперплоскости.

Линейное отображение $f: V \to P$ линейного пр–ва V над полем P в это поле называется ***линейным функционалом*** в пр–ве V.

Пр. 1. Простейший линейный функционал в пр–ве V – отображение $f: V \to P$: $f(x) = 0$, где $0 \in P$.

2. Отображение $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу: если $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то $f(x) = x_1$.

3. В пр–ве M_n вещественных многочленов степени $\le n$ линейным функционалом является отображение
$f: M_n \to \mathcal{R}$ по правилу: если $p(t) \in M_n$, то $f(p) = p(1)$.

Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис пр–ва V, то линейный функционал $f \in \mathcal{L}(V, P)$, однозначно определяется числами $\alpha_1 = f(e_1), \ldots, \alpha_n = f(e_n)$. Для $\forall\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ в силу линейности f: $f(x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ **(1)**

(1) – ***общий вид линейного функционала*** *f в базисе* $e_1, \ldots, e_n$. Числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – ***коэффициенты линейного функционала*** *f в базисе* $e_1, \ldots, e_n$.

Мн–во $\mathcal{L}(V, P)$ всех линейных функционалов в линейном пр–ве V образует линейное пр–во относительно операций сложения и умножения на число: $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Линейное пр–во всех линейных функционалов на пр–ве V называется ***сопряженным пр–вом V^* к пр–ву V***.

Т1. $\dim V^* = \dim V$.

=> из Т (*Если* $\dim V = n$, $\dim W = m$, *то линейное пр–во $\mathcal{L}(V, W)$ изоморфно пр–ву матриц $P^{m \times n}$*) и ее следствия ($\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$), т.к. $\dim P = 1$

Сл. *Всякое конечномерное линейное пр–во изоморфно своему сопряженному.*

=> из Т (2 *линейных пр–ва над общим полем изоморфны $\Leftrightarrow$ их размерности совпадают*).

Т2. *Для $\forall$ линейного функционала f в евклидовом* (*унитарном*) *пр–ве V $\exists$! вектор $h \in V$*:

$$f(x) = (x, h),\ \forall x \in V.$$

Док–во. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ОНБ пр-ва V и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – коэффициенты f в этом базисе => вектор $h = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} e_i$ будет искомым в силу (1) и (*В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, *заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу* $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ $\Leftrightarrow$ e – ОНБ). Пусть еще вектор h_1 удовлетворяет требованиям теоремы => $(x, h_1) = (x, h)$, $\forall x \in V$, т.е. $(x, h_1 - h) = 0$, $\forall x \in V$. Т.к. $h_1 - h \in V \Rightarrow$
$h_1 - h = \theta \Rightarrow h$ – единственный •

Пусть $L = \ker f$. Если $L = V$, то $f \equiv 0$ (0–й или тривиальный).

Пусть $L \ne V$. Тогда $\exists$ вектор x_0 : $f(x_0) \ne 0$. Для $\forall x \in V$ находим: $f(x - \alpha x_0) = 0$ при $\alpha = f(x) / f(x_0) \Rightarrow$
$x = z + \alpha x_0$, $z \in L$. α однозначно определяется условием $z \in L \Rightarrow V = L \oplus L(x_0) \Rightarrow \dim L^{\perp} = 1$.

Рассмотрим $M_c = \{x \in V : f(x) = c\}$. Если $f(x_0) = c$, то, $M_c = x_0 + L$. Т.о., M_c – линейное многообразие с направляющим пр–вом L, у которого дополнительное пр–во имеет размерность 1. В таких случаях линейное многообразие называется *гиперплоскостью.* Отображение $f(x) \to M(f) = \{x \in V : f(x) = 1\}$ является взаимно–однозначным соответствием между линейными функционалами и гиперплоскостями.

Пусть $\dim V = n$ и $e_1, \ldots, e_n$ – базис в $V \Rightarrow \forall$ линейный функционал имеет вид:

$$f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n, \text{ где } c_i = f(e_i).$$

Т.о., $\forall$ гиперплоскость в n–мерном пр–ве имеет вид $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = c$, где $x_1, \ldots, x_n$ – координаты разложения вектора по выбранному базису.

19. Обратный оператор и критерий обратимости.

Отображение $f : X \to Y$ называется:

– *инъективным*, если из $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;

– *сюръективним*, если $\mathrm{im}\ f = Y$;

– *биективным*, если оно инъективно + сюръективно, т.е. $f(x) = y$ при $\forall\ y \in Y$ имеет единственное решение.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Отображение $\mathcal{A}^{-1} : V \to V$ называет ***обратным оператором*** к оператору $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}$, **(1)**

тождественный ЛО $\mathcal{I} : V \to V$, $\forall x \in V$ переводит в x

Т1. *ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ обратим $\Leftrightarrow$ он биективен.*

Док–во. 1)*Необх–сть*. Пусть $\mathcal{A}$ обратим, докажем его биективность. Если он не инъективен, то $\exists\ x_1, x_2 \in V$: $x_1 \neq x_2$ и $\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Rightarrow x_1 = \mathcal{I}x_1 = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(x_1) =$

$= \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x_1) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x_2) = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(x_2) = \mathcal{I}x_2 = x_2$.

Пусть $\forall\ x \in V \Rightarrow x = \mathcal{I}x = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}(x) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}x) =$

$= \mathcal{A}y,\ y \in V \Rightarrow \mathcal{A}$ – сюръективен => он биективен.

2)*Дост–сть*. Пусть $\mathcal{A}$ – биективен, тогда для $\forall\ y \in V$

$\exists\,!$ прообраз $x \in V$ ($\mathcal{A}x = y$). Построим отображение

$\mathcal{A}^{-1}: V \to V$, положив $\mathcal{A}^{-1}y = x \Rightarrow$ для $\forall\ y \in V$ имеем: $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}(y) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}y) = \mathcal{A}x = y \Rightarrow \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}$. А для $\forall\ x \in V$ имеем: $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^{-1}y = x \Rightarrow$

$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I} \Rightarrow (1) \Rightarrow \mathcal{A}$ обратим.

Т2. *Обратный оператор единствен.*

Док–во. Пусть $\mathcal{A}_1^{-1}$ *и* $\mathcal{A}_2^{-1}$ – 2 обратных оператора к $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}_1^{-1} = \mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{I} = \mathcal{A}_1^{-1}(\mathcal{A}\mathcal{A}_2^{-1}) = (\mathcal{A}_1^{-1}\mathcal{A})\mathcal{A}_2^{-1} = \mathcal{I}\mathcal{A}_2^{-1} = \mathcal{A}_2^{-1}$

Т3. *Обратный оператор линеен.*

Док–во. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Покажем, что обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$, если он $\exists$, является ЛО, действующим в пр–ве V. $\mathcal{A}$ обратим => он биективен и сюръективен => для $\forall\ y_1, y_2 \in V\ \exists\ x_1, x_2 \in V$: $y_1 = \mathcal{A}x_1$, $y_2 = \mathcal{A}x_2$. Т.к. $x_1 = \mathcal{A}^{-1}y_1$, $x_2 = \mathcal{A}^{-1}y_2 \Rightarrow \mathcal{A}^{-1}(y_1 + y_2) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x_1 + \mathcal{A}x_2) = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = \mathcal{A}^{-1}y_1 + \mathcal{A}^{-1}y_2$.

Ан–но, $\mathcal{A}^{-1}(\alpha y_1) = \mathcal{A}^{-1}(\alpha\mathcal{A}x_1) = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}(\alpha x_1) = \alpha x_1 =$

$= \alpha\,\mathcal{A}^{-1}y_1, \forall\ \alpha \in P$ •

Т4. *Матрица обратного оператора $\mathcal{A}^{-1}$ в произвольном базисе является обратной к матрице оператора $\mathcal{A}$ в этом же базисе.*

Док–во. Пусть e – $\forall$ базис пр–ва V и для оператора

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)\ \exists$ обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Перейдем в равенствах (1) к матрицам операторов в базисе e. По Т (*При умножении ЛО их матрицы умножаются, т.е. если e, f, g – базисы пр–тв V, W, Z, то*

$(\mathcal{B}\mathcal{A})_{ge} = B_{gf}A_{fe}$ **(2)**) получим, что $A_e(\mathcal{A}^{-1})_e = (\mathcal{A}^{-1})_e A_e = I$. Эти равенства совпадают с определением обратной матрицы для A_e. Т.о., $(A_e)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})_e$ •

Оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ ***невырожденным***, если его ядро состоит только из 0–го вектора: $\ker \mathcal{A} = \{\theta\}$, и ***вырожденный*** в противном случае.

Т5. *В конечномерном пр–ве V следующие утверждения равносильны: для* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$

1) $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}$	5) $\det \mathcal{A} \neq 0$
2) $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}$	6) $\mathcal{A}$ *обратим;*
3) $\mathcal{A}$ *не вырожден*	7) $\mathcal{A}$ *биективен.*
4) $\mathrm{im}\ \mathcal{A} = V$	

Док–во. **1** $\Leftrightarrow$ **2** $\Leftrightarrow$ **5** $\Leftrightarrow$ **6** $\Leftrightarrow$ **7**. Пусть $e = (e_1,\dots,e_n)$ – $\forall$ базис пр–ва V. В силу (2) У1 $\Leftrightarrow A_e(\mathcal{A}^{-1})_e = I \Leftrightarrow$ с учетом теоремы о единственности обратной матрицы $A_e(A_e)^{-1} = (A_e)^{-1}A_e = I$, эквивалентным (в силу (2)) равенствам (1) и (по Т (*Матрица обратима $\Leftrightarrow$ она не вырождена*)) условию $\det A_e \neq 0$. Это доказывает

1 $\Leftrightarrow$ 5, 1 $\Leftrightarrow$ 2, 1 $\Leftrightarrow$ 6 и, согласно Т1, 1 $\Leftrightarrow$ 7.

1 $\Leftrightarrow$ **3** $\Leftrightarrow$**4**. У1 в силу $\det A_e \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rg}\ \mathcal{A} = n \Rightarrow$ в силу ($\mathrm{rg}\ \mathcal{A} + \mathrm{def}\ \mathcal{A} = \dim V$) $\mathrm{def}\ \mathcal{A} = 0$. $\mathrm{rg}\ \mathcal{A} = n \Rightarrow \dim \mathrm{im}\ \mathcal{A} = \dim V \Rightarrow \mathrm{im}\ \mathcal{A} = V$ по Т о монотонности размерности (*Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пр–ва. Подпространство той же размерности, что и все пр–во, совпадает с пр–ом.*). Это доказывает 1 $\Leftrightarrow$ 4. $\mathrm{def}\ \mathcal{A} = 0 \Rightarrow$

$\dim \ker \mathcal{A} = 0$. Это доказывает 1 $\Leftrightarrow$ 3. •

Т6. *Произведение обратимых операторов обратимо, при этом* $(\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}$.

Док–во. Докажем, что произведение обратимых операторов биективно.

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, V)$ – обратимы => они инъективны и сюръективны. Из инъективности => для $\forall x_1, x_2 \in V : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \mathcal{A}x_1 \neq \mathcal{A}x_2 \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}x_1) \neq \mathcal{B}(\mathcal{A}x_2) \Rightarrow (\mathcal{B}\mathcal{A})x_1 \neq (\mathcal{B}\mathcal{A})x_2$. Из сюръективности => для $\forall\ z \in V\ \exists\ y \in V$: $z = \mathcal{B}y$, но для этого $y\ \exists\ x \in V$: $y = \mathcal{A}x \Rightarrow \forall\ z \in V\ \exists\ x \in V$:

$z = \mathcal{B}\mathcal{A}x \Rightarrow$ оператор $\mathcal{B}\mathcal{A}$ биективен => обратим.

$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1})\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}$.

$(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1})(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{I}$. •

С1. *Умножение ЛО является алгебраической операцией на множестве всех обратимых операторов, действующих в пр–ве V .*

20. Собственные значения и векторы. Операторы простой структуры и диагонализуемые матрицы.

Пусть V – линейное пр–во над полем P. Ненулевой вектор $x \in V$ называется ***собственным вектором оператора***

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, если $\exists\ \lambda \in P$: $\mathcal{A}x = \lambda x$. **(1)**

Число λ – ***собственное значение оператора $\mathcal{A}$, соответствующее собственному вектору x***. Множество всех собственных значений оператора A – ***спектр*** оператора.

Из определения => если x – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ, то $\forall\ \alpha x$, где

$\alpha \neq 0$, также будет собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим тому же собственному значению $\lambda \Rightarrow \forall$ собственный вектор порождает 1–мерное подпространство собственных векторов, из которого исключен вектор θ.

Т1. *Собственные векторы $x_1, \dots, x_k$ оператора, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.*

Док–во. Индукция по k. Для $k = 1$ верно, т. к. собственный вектор ненулевой по определению. Пусть верно для $\forall$ системы из $k - 1$ векторов. Докажем для k векторов $x_1, \dots, x_k$. Пусть $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = \theta$ **(2)**

Под действием $\mathcal{A}$: $\alpha_1\lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_k\lambda_k x_k = \theta$ **(3)**.

(3)– $\lambda_k \cdot$(2) : $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = \theta$

Из индуктивного предположения => $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0 \Rightarrow \alpha_k x_k = \theta$. Т.к. $x_k \neq \theta$, то $\alpha_k = 0 \Rightarrow$ в (2) все $\alpha_i = 0 \Rightarrow x_1, \dots, x_k$ линейно независимы. •

С1. *ЛО, действующий в n–мерном пр–ве, не может иметь более чем n различных собственных значений.*

ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется ***оператором простой структуры***, если в пр–ве $V\ \exists$ базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Т2. *ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ имеет простую структуру $\Leftrightarrow$ в пр–ве V $\exists$ базис, в котором он имеет диагональную матрицу.*

Док–во. Пусть $\dim V = n$. Из определения => оператор $\mathcal{A}$ имеет простую структуру $\Leftrightarrow$ он имеет n линейно независимых собственных векторов $e_1, \dots, e_n \Leftrightarrow \exists$ базис $e_1,\dots, e_n$, в котором матрица оп–ра $\mathcal{A}$ имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения, соответствующие собственным векторам $e_1, \dots, e_n$. •

С2. *В n–мерном пр–ве ЛО, имеющий n различных собственных значений, является оператором простой структуры.*

В соответствии с (4) оператор простой структуры называют ***диагонализуемым оператором***.

Пусть λ_0 – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Множество $W_{\lambda 0} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_0 x\}$ называется ***собственным подпространством оператора*** $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ_0 .

Размерность собственного подпространства $W_{\lambda 0}$ – ***геометрическая кратность собственного значения*** λ_0,

а кратность λ_0 как корня характеристического многочлена – его ***алгебраическая кратность***.

Т3. *ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ имеет простую структуру $\Leftrightarrow$ все его собственные подпространства в прямой сумме дают все пр–во V:* $W_{\lambda 1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda P} = V$ **(5)**

Док–во. Необх–ть. Пусть $\mathcal{A}$ имеет простую структуру =>

в пр–ве $V\ \exists$ базис $e_1, \dots, e_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Каждый вектор этого базиса принадлежит некоторому собственному пространству $W_{\lambda K} \Rightarrow W_{\lambda 1} + \dots + W_{\lambda P} = V$. Но эта сумма является прямой в силу теоремы (*Сумма собственных подпространств оператора, отвечающих различным собственным значениям, является прямой суммой.*).

Дост–ть вытекает из критерия прямой суммы : совокупность базисов собственных подпространств

$W_{\lambda 1}, \dots, W_{\lambda P}$ образует базис V => пр–во V имеет базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. •

З1. На основании критерия прямой суммы условие (5) $\Leftrightarrow$ $\dim W_{\lambda 1} + \dots + \dim W_{\lambda P} = \dim V$ **(6)**

Т4. *ЛО, действующий в комплексном пр–ве, имеет простую структуру $\Leftrightarrow$ для каждого собственного значения этого оператора геометрическая кратность совпадает с алгебраической.*

Док–во. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, – все различные собственные значения ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ и пусть m_k и s_k,

$k = \overline{1,p}$ – алгебраические и геометрические кратности λ_k. Т.к. V – комплексное пр–во, то $\dim V = m_1 + \dots + m_p$.

Но $0 < \dim W_{\lambda K} = s_k \leq m_k$, $k = \overline{1,p} \Rightarrow$ (6) возможно $\Leftrightarrow s_k = m_k$, $k = \overline{1,p}$ •

Ненулевой вектор–столбец $x \in P^n$ называется ***собственным вектором матрицы*** $A \in P^{n \times n}$, если $\exists\ \lambda \in$ P: $Ax = \lambda x$. Число λ называется ***собственным значением матрицы*** A, соответствующим собственному вектору x. Если $e = (e_1,\dots,e_n)$ – $\forall$ базис пр–ва V, то для $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$: $\mathcal{A}x = \lambda x \Leftrightarrow A_e x_e = \lambda x_e$ **(7)** => собственные значения ЛО $\mathcal{A}$ и его матрицы в $\forall$ базисе $e = (e_1,\dots,e_n)$ совпадают, а собствен–ные векторы матрицы A_e являются координатными столбцами собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Характеристические многочлены оператора и его матрицы совпадают по определению.

Квадратная матрица $A \in P^{n \times n}$ называется ***матрицей простой структуры***, если она имеет n линейно независимых собственных векторов. Из (7) => ЛО является оператором простой структуры $\Leftrightarrow$ его матрица в $\forall$ базисе имеет простую структуру.

Т5. *Квадратная матрица является матрицей простой структуры $\Leftrightarrow$ она подобна диагональной.*

Док–во. Пусть $A \in P^{n \times n}$ – заданная матрица. Рассмотрим

$\forall$ линейное пр–во V над P размерности n. Зафиксируем в пр–ве $V\ \forall$ базис f. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, матрица которого в базисе f совпадает с A, так что $A = A_f$ (такой оператор $\exists$ по Т (*Пусть* $\dim V = n$, $\dim W =$ m. *Тогда $\exists$ взаимно однозначное соответсвие между ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m \times n}$*)). Матрица $A = A_f$ имеет простую структуру $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ – оператор простой структуры $\Leftrightarrow$ по Т2 $\exists$ базис e, в котором оператор $\mathcal{A}$ имеет диагональную матрицу (4) => A имеет простую структуру $\Leftrightarrow$ она и диагональная матрица (4) являются матрицами одного ЛО. При переходе от базиса e к базису $f = eQ$ матрица оператора изменяется по закону $A_f = Q^{-1}A_e Q$.

21. Характеристический многочлен ЛО. Условие существования собственных значений.

Характеристическим многочленом матрицы $A \in P^{n\times n}$ называется функция $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $\lambda \in P$ **(1)**

Т1. *Характеристический многочлен* (1) *матрицы* $A \in P^{n\times n}$ *является многочленом n–й степени от переменной λ над полем P.*

Док–во. Пусть $A = (a_{ij}) \in P^{n\times n}$ =>

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

∀ элемент матрицы $A - \lambda I$ – это многочлен от λ степени ≤ 1 => ∀ член $\det(A - \lambda I)$ – это многочлен от λ степени ≤ n => $f(\lambda)$ – многочлен от λ, степень которого ≤ n. Покажем, что степень $f(\lambda)$ в точности = n. Все члены $\det(A - \lambda I)$ отличные от $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda)$, имеют степень, ≤ $n - 2$, => в $f(\lambda)$ слагаемые, содержащие λ^{n-1} и λ^n, определяются только членом $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda)$, который по формулам Виета имеет вид :

$(-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + g_{n-2}(\lambda)$, где $g_{n-2}(\lambda)$ – многочлен от λ степени не выше $n - 2$. Т.о.,

$f(\lambda) = a_0 + a_1(-\lambda) + a_2(-\lambda)^2 + \dots + a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + (-\lambda)^n$ **(2)**

является многочленом n–й степени от λ над полем P. •

З1. $a_{n-1} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$, $a_0 = f(0) = \det A$ => в (2) $a_0 = \det A$, $a_{n-1} = \mathrm{tr}\, A$. **(3)**

Т2. *Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.*

Док–во. Если матрицы A и B подобны, т.е. ∃ невырожденная матрица Q: $A = Q^{-1}BQ$, то

$|A - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - \lambda I| = |Q^{-1}BQ - Q^{-1}\lambda I Q| =$
$= |Q^{-1}(B - \lambda I)Q| = |B - \lambda I|$ •

Сл. *Все матрицы одного и того же ЛО имеют одинаковые характеристические многочлены.*

Характеристическим многочленом оператора называется функция $f(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$, $\lambda \in P$

Т.к. все матрицы одного и того же ЛО имеют одинаковый определитель, равный определителю матрицы ЛО в произвольном базисе ($\det \mathcal{A} = \det A_e$), то характеристический многочлен оператора совпадает с характеристическим многочленом матрицы этого оператора в ∀ базисе. Из следствия и 2–го равенства (3) => след матрицы A_e ЛО $\mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса e => ***след оператора*** : $\mathrm{tr}\, \mathcal{A} = \mathrm{tr}\, A_e$

Линейное подпространство L пр–ва V называется ***инвариантным подпространством относительно оператора*** $\mathcal{A}$, если для ∀ $x \in L$: $\mathcal{A}x \in L$. . Пусть L – подпространство, инвариантное относительно опе–ратора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Отображение $\mathcal{A} \mid L : L \to L$, определенное равенством $(\mathcal{A} \mid L)x = \mathcal{A}x$, ∀ $x \in L$, называется ***индуцированным оператором, порожденным оператором*** $\mathcal{A}$ или ***сужением оператора $\mathcal{A}$ на L.***

Т3. *Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристи–ческого многочлена порождающего оператора.*

=> из теорем (*) и (**) •

Т4. *Если* $V = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ *– прямая сумма подпро–странств* $L_1, \dots, L_k$, *инвариантных относительно оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, *то характеристический многочлен* $f(\lambda)$ *оператора* $\mathcal{A}$ *равен произведению характеристических многочленов* $f_1(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$ *индуцированных операторов* $\mathcal{A} \mid L_1, \dots, \mathcal{A} \mid L_k$:

$$f(\lambda) = f_1(\lambda) \dots f_k(\lambda) \qquad (4)$$

=> из теоремы (**) •

Т5. *Пусть V – линейное пр–во над P. Число* $\lambda \in P$ *является собственным значением ЛО* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ ⇔ *λ – корень его характеристического многочлена.*

Док–во. По определению число λ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ ⇔ ∃ вектор x: $\begin{cases} \mathcal{A}x = \lambda x, \\ x \neq \theta, \\ \lambda \in P \end{cases}$ <=> $\begin{cases} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x = \theta, \\ x \neq \theta, \\ \lambda \in P \end{cases}$

⇔ вырожденность оператора $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ при некотором $\lambda \in P$ или $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ при некотором $\lambda \in P$ => число λ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ ⇔ оно является корнем характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$, $\lambda \in P$. •

$\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ – ***характеристическое уравнение*** для оператора $\mathcal{A}$.

Не во всяком поле многочлены имеют корни. Но в алгебраически замкнутом поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел ∀ многочлен степени $n \geq 1$ с учетом кратности имеет n корней => в соответствии с Т5 =>

Т6. *Произвольный ЛО, действующий в n–мерном комплексном пространстве, имеет:*

1) n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;

2) хотя бы 1 собственный вектор;

3) на ∀ своем инвариантном подпространстве хотя бы 1 собственный вектор (=> из того, что индуци–рованный оператор, как и ∀оператор, действующий в комплексном пр–ве, имеет собственный вектор, явля–ющийся собственным вектором основного оператора.

З2. Т6 справедлива в вещественном пр–ве для тех операторов, чьи характеристические многочлены имеют только вещественные корни.

---

* *Пусть* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ *и L – инвариантное подпро–странство относительно* $\mathcal{A}$. *Тогда ∃ базис пр–ва V, в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *имеет квазитреугольную форму.*

** *Если пр–во V является прямой суммой подпро–странств* $L_1, \dots, L_k$, *инвариантных относительно оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, *то в пр–ве V ∃ базис, в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *имеет квазидиагональную форму* $A_e = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & \dots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix}$, *где матрицы* $A_1, \dots, A_k$ *являются матрицами индуцированных операторов* $\mathcal{A}_1 \mid L, \dots, \mathcal{A}_k \mid L$ *в базисах инвариантных подпространств* $L_1, \dots, L_k$

22. Собственное подпространство. Геометрическая и алгебраическая кратности собств. значений.

Пусть V – линейное пр–во над полем P. Линейное подпространство L пр–ва V называется ***инвариантным подпространством относительно оператора*** $\mathcal{A}$, если для ∀ $x \in L$: $\mathcal{A}x \in L$. . Пусть L – подпространство, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Отображение $\mathcal{A} \mid L : L \to L$, определенное равенством $(\mathcal{A} \mid L)x = \mathcal{A}x$, ∀ $x \in L$, называется ***индуцированным оператором, порожденным оператором*** $\mathcal{A}$ или ***сужением оператора $\mathcal{A}$ на L.*** Ненулевой $x \in V$ называется ***собственным вектором оператора*** $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, если ∃ $\lambda \in P$: $\mathcal{A}x = \lambda x$. **(1)**

Число λ называется ***собственным значением оператора $\mathcal{A}$, соответ–ствующим собственному вектору x***. Множество всех собственных значений оператора A называется ***спектром*** этого оператора.

Пусть λ_0 – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Множество $W_{\lambda 0} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_0 x\}$ **(2)**

называется ***собственным подпространством опе–ратора*** $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ_0.

$W_{\lambda 0} = \ker(\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I})$ => собственное подпространство является линейным подпространством пр–ва V. Из (2) => собственное подпространство $W_{\lambda 0}$ состоит из 0–го вектора θ и всех собственных векторов, отвечающих λ_0 .

Собственное подпространство инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$.

Размерность собственного подпространства $W_{\lambda 0}$ называется ***геометрической кратностью собственного значения*** λ_0, а кратность λ_0 как корня характеристического многочлена называется его ***алгебраической кратностью***.

Т1. *Геометрическая кратность собственного зна–чения не превосходит его алгебраической кратности.*

Док–во. Пусть m и s – алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения λ_0 оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Собственное подпространство $W_{\lambda 0}$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$ => можно рассматривать индуцированный оператор $\mathcal{A} \mid W_{\lambda 0}$. Найдем его характеристический многочлен $f_1(\lambda)$. Пусть $e_1, \dots, e_s$ – базис $W_{\lambda 0}$ => согласно (2) матрицей оператора $\mathcal{A} \mid W_{\lambda 0}$ в этом базисе будет диагональная матрица s–го порядка с элементами λ_0 на главной диагонали => $f_1(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^s$. По теореме (*Характеристический многочлен индуцированного оператора является делителем характеристического многочлена порождающего оператора*), $(\lambda_0 - \lambda)^s$ – делитель характеристического многочлена $f(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$, но $(\lambda_0 - \lambda)$ входит в характеристический многочлен $f(\lambda)$ ровно m раз. Значит, $s \leq m$. •

Т2. *Сумма собственных подпространств оператора, отвечающих различным собственным значениям, является прямой суммой.*

Док–во. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ – попарно различные собственные значения оператора $\mathcal{A}$ => для собственных подпространств $W_{\lambda 1}, \dots, W_{\lambda P}$ выполнено условие прямой суммы: ∀ система ненулевых векторов, взятых по одному из каждого $W_{\lambda K}$, линейно независима как система собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям (теорема: *Собственные векторы* $x_1, \dots, x_k$ *оператора, отвечающие различным собственным значениям* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, *линейно независимы*). •

23. Инвариантность подпространства. Сужение оператора.

Пусть V – линейное пр–во над полем P и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Линейное подпространство L пр–ва V называется ***инвариантным подпространством относительно оператора $\mathcal{A}$***, если для $\forall x \in L$: $\mathcal{A}x \in L$.

Пр. 1. Тривиальные подпространства $\{\theta\}$ и V инвариантны относительно $\forall$ оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$.

2. Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A}$ инвариантные подпространства: ker $\mathcal{A}$ и im $\mathcal{A}$, т.к. если $\mathcal{A}x = \theta$, то $\mathcal{A}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}\theta = \theta$, и если $y = \mathcal{A}x$, то $\mathcal{A}y = \mathcal{A}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}x_1$, где $x_1 = \mathcal{A}x$.

3. Для оператора дифференцирования (D: $M_n \to M_n$: $\mathrm{D}\,p(t) = p'(t)$) в пространстве M_n вещественных многочленов инвариантными подпространствами являются все подпространства $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$.

Т1. *Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ и L – инвариантное подпро–странство относительно $\mathcal{A}$. Тогда $\exists$ базис пр–ва V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазитреугольную форму.*

Док–во. Пусть $e_1, \dots, e_k$ – базис L. Дополним его до базиса $e_1, \dots, e_k, e_{k+1} \dots, e_n$ пр–ва V. Построим матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Из инвариантности L =>

$\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_k \in L$ => векторы $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_k$ линейно выражаются только через $e_1, \dots, e_k$ =>

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = a_{11}\, e_1 + \dots + a_{k1}\, e_k, \\ \quad\dots \\ \mathcal{A}e_k = a_{1k}\, e_1 + \dots + a_{kk}\, e_k \\ \mathcal{A}e_{k+1} = a_{1,k+1}\, e_1 + \dots + a_{n,k+1}\, e_n, \\ \quad\dots \\ \mathcal{A}e_n = a_{1n}\, e_1 + \dots + a_{nn}\, e_n \end{cases} \qquad (\mathbf{1})$$

=> матрица A_e имеет вид: $$A_e = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} \dots & a_{1n} \\ & & & \dots & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} \dots & a_{kn} \\ 0 \dots & & 0 & a_{k+1,k+1} \dots & a_{k+1,n} \\ & & & \dots & \\ 0 & & \dots\ 0 & a_{n,k+1} \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

=> имеет квазитреугольную форму: $A_e = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ O & C \end{bmatrix}$ $\qquad (\mathbf{2})$

***З*1**. Верна и обратная теорема: переход от (2) к (1) очевиден => $L = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_k)$ инвариантно отн–но $\mathcal{A}$.

Т2. *Если пр–во V является прямой суммой подпро–странств $L_1, \dots, L_k$, инвариантных отн–но оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, то в пр–ве V $\exists$ базис, в котором матр–ица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму*.

Док–во ан–но док–ву Т1. В качестве искомого базиса берется базис e, составленный из базисов слагаемых подпространств (критерий прямой суммы) => в силу инвариантности $L_1, \dots, L_k$ матрица A_e имеет вид

$$A_e = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & \dots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{3})$$

***З*2**. Верна и обратная теорема.

Индуцированный оператор. Рассматривая ЛО только на его инвариантном подпространстве, можно получить новый оператор. Пусть L – подпространство, инвариантное относительно оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$.

Отображение $\mathcal{A} / L : L \to L$, определенное равенством $(\mathcal{A} / L)\, x = \mathcal{A}x$, $\forall x \in L$, называется ***индуцированным оператором, порожденным оператором $\mathcal{A}$*** или ***сужением оператора $\mathcal{A}$ на L.*** *В* силу линейности оператора $\mathcal{A}$ индуцированный оператор также будет линейным. Он совпадает с ЛО $\mathcal{A}$ на подпространстве L и **не** определен вне его. Итак, $\mathcal{A} / L \in \mathcal{L}(V, V)$.

***З*3**. Из разложений (1) => матрицы $A_1, \dots, A_k$ в (3) являются матрицами индуцированных операторов $\mathcal{A}_1 / L, \dots, \mathcal{A}_k / L$ в базисах инвариантных подпространств $L_1, \dots, L_k$.

24. Треугольная форма матрицы линейного оператора. Теорема Шура.

Пусть V – линейное пр–во над полем P и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Линейное подпространство L пр–ва V называется ***инвариантным подпространством относительно оператора $\mathcal{A}$***, если для для $\forall x \in L$: $\mathcal{A}x \in L$.

Отображение $\mathcal{A} / L : L \to L$, определенное равенством $(\mathcal{A} / L)\, x = \mathcal{A}x$, $\forall x \in L$, называется ***индуцированным оператором, порожденным оператором $\mathcal{A}$*** или ***сужением оператора $\mathcal{A}$ на L.***

Т1. *В n–мерном комплексном пр–ве V для $\forall$ ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ $\exists$ система n вложенных друг в друга инвариантных подпространств $L_1, \dots, L_n$ всех размерностей от 1 до n, т.е. таких, что $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = V$, где* $\dim L_k = k$, $k = \overline{1, n}$.

Док–во. Индукция по n. Для $n = 1$ очевидно. Пусть теорема верна для всех линейных пр–тв размерности $n - 1$. Докажем ее для n–мерного пр–ва V.

Л. *ЛО, действующий в n–мерном комплексном пр–ве, имеет инвариантное подпространство* $\dim = n - 1$.

Док–во леммы. ЛО $\mathcal{A}$, действующий в комплексном пр–ве V, имеет собственное значение λ (Т: $\forall$ *ЛО, действующий в n–мерном комплексном пр–ве, имеет:*1) *n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;*2) *хотя бы 1 собственный вектор;*3) *на $\forall$ своем инвариантном подпространстве хотя бы 1 собственный вектор*) => $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ и

$\operatorname{rg}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) \le n - 1$ => $\dim \operatorname{im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) \le n - 1$ и в пр–ве V $\exists$ подпространство L размерности $n - 1$, которое содержит $\operatorname{im}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$. L инвариантно отн–но оператора $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$. Пусть $x \in L$ => $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x = y \in L$ => $\mathcal{A}x = \lambda x + y \in L$ => L инвариантно отн–но $\mathcal{A}$.

Док–во теоремы. Согласно лемме оператор $\mathcal{A}$, действующий в n–мерном комплексном пр–ве V, имеет инвариантное подпространство L_{n-1} размерности $n - 1$ => индуцированный оператор

$\mathcal{A} \mid L_{n-1}$ действует в $(n - 1)$–мерном комплексном пр–ве L_{n-1} и по индуктивному предположению для него $\exists$ система вложенных инвариантных $L_1 \subset \dots \subset L_{n-1}$ таких, что $\dim L_k = k$, $k = \overline{1, n-1}$. Т.к. действия операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \mid L_{n-1}$ совпадают, то $L_1, \dots, L_{n-2} \subset L_{n-1}$ инвари–антны отн-но $\mathcal{A}$. Остается добавить, что $L_{n-1} \subset L_n = V$. •

Т2. *Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пр–ве, $\exists$ базис, в котором матрица ЛО имеет треугольную форму.*

Док–во. Согласно Т1 для оператора $\mathcal{A}$ $\exists$ система инвариантных подпространств $L_1, \dots, L_n$ таких, что

$\dim L_k = k$ и $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = V$. Базис $e_1, \dots, e_n$ строим так: в качестве e_1 берем $\forall$ базис L_1, в качестве e_k, где

$k > 1$, – вектор, дополняющий базис L_{k-1} до базиса L_k. В силу ин-вариантности подпространств L_k $k = \overline{1, n}$, матрица A_e имеет верхнюю треугольную форму. •

***З*1**. На главной диагонали матрицы A_e расположены собственные значения оператора $\mathcal{A}$.

Т3. $\forall$ *квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей треугольную форму.*

Док–во. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – заданная матрица. Рассмотрим $\forall$ комплексное пр–во V размерности n. Зафиксируем в пр–ве V $\forall$ базис f. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, матрица которого в базисе f совпадает с матрицей A, так что $A = A_f$ (такой оператор $\exists$ по теореме (*Пусть* $\dim V = n$, $\dim W =$ m. *Тогда $\exists$ взаимно однозначное соответствие между ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и матрицами из $P^{m \times n}$*)). В силу Т2 $\exists$ базис e, в котором матрица A_e оператора $\mathcal{A}$ имеет треугольную форму. При переходе от базиса e к базису $f = eQ$ матрица оператора изменяется по закону $A_f = Q^{-1} A_e Q$. Это равносильно их подобию. •

Т4 (теорема Шура). *Для $\forall$ оператора, действую–щего в унитарном пр–ве, $\exists$ ОНБ, в котором он имеет треугольную матрицу.*

Повторяется док–во Т2 , но на каждом шаге строится ОНБ инвариантного подпространства.

25. Сдвиг оператора, нильпотентность и обратимость его сужений.

ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – ***нильпотентный***, если $\exists\, q \in \mathbb{N} : \mathcal{A}^q = \mathcal{O}$ Наименьшее q – ***индекс нильпотентности*** (***высота***) оператора $\mathcal{A}$. Для ненулевого $\mathcal{A}$ $q \geq 2$. Ан–но определяется нильпотентная матрица $A \in P^{n \times n}$ и ее индекс.

Т1. *Если $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – нильпотентный оператор индекса q и $x_0 \in V$ – вектор, для которого $\mathcal{A}^{q-1} x_0 \neq \theta$, то векторы $x_0, \mathcal{A} x_0, ..., \mathcal{A}^{q-1} x_0$ линейно независимы.*

Док–во. Применяя послед–но $\mathcal{A}^{q-1}, \mathcal{A}^{q-2}, ... , \mathcal{A}$ к равенству $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 \mathcal{A} x_0 + ...+ \alpha_{q-1} \mathcal{A}^{q-1} x_0 = \theta$, получим: $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{q-1} = 0$ => линейная независимость системы векторов. •

***С*1**. *Индекс нильпотентности не превосходит* $\dim V$.

Т2. *В комплексном пр–ве ЛО нильпотентен ⇔ все его собственные значения $= 0$.*

Док–во. *Необх–сть*. Если λ – собственное значение нильпотентного оп–ра $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ индекса q и x – соот–щий собственный вектор, то $\mathcal{A} x = \lambda x$ => $\mathcal{A}^2 x = \lambda^2 x$ =>...=> $\mathcal{A}^q x = \lambda^q x$ => $\lambda^q x = \theta$. Т.к. $x \neq \theta$, то $\lambda = 0$.

Дост–сть. Рассмотрим базис e комплексного пр–ва V, в котором оператор $\mathcal{A}$ имеет верхнюю треугольную матрицу (*Для ∀ ЛО $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пр–ве, ∃ базис, в котором матрица ЛО имеет треугольную форму*), главная диагональ которой состоит целиком из 0 (*На глав–ной диагонали матрицы A_e расположены собственные значения оператора $\mathcal{A}$*) =>

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

При последовательном возведении A_e в степени q=2,3 ... ,n треугольник над главной диагональю перемещается каждый раз на 1 диагональ выше => $(A_e)^n = O$ => $\mathcal{A}^n = \mathcal{O}$. •

Если $V = L_1 \oplus ... \oplus L_p$ – прямая сумма подпространств $L_1, L_2, . . . , L_p$, инвариантных относительно ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, то оператор $\mathcal{A}$ называется ***прямой суммой индуциро–ванных операторов*** $\mathcal{A} \mid L_1, . . . , \mathcal{A} \mid L_p$. Этот термин мотивирован тем, что для $\forall x \in V$ с разложением $x = x_1 + . . . + x_p$, где $x_k \in L_k$, $k = \overline{1,p}$, имеет место равенство

$\mathcal{A} x = \mathcal{A} x_1 + . . . + \mathcal{A} x_p = (\mathcal{A} \mid L_1) x_1 + . . . + (\mathcal{A} \mid L_p) x_p$.

Т3. *∀ ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов, причем это разложение единственно.*

Док–во. Надо показать, что ∃ ! пара подпространств L_1 , L_2, инвариантных относительно ЛО $\mathcal{A}$ и таких, что

$V = L_1 \oplus L_2$, $\mathcal{A} \mid L_1$ нильпотентен, $\mathcal{A} \mid L_2$ обратим.

Для невырожденного $\mathcal{A}$: $L_1 = \{\theta\}$, $L_2 = V$. Для нильпотентного $\mathcal{A}$: $L_1 = V$, $L_2 = \{\theta\}$.

Пусть оператор $\mathcal{A}$ вырожден и не нильпотентен.

Существование. Пусть для $k \in \mathbb{N}$: $N_k = \ker \mathcal{A}^k$, $T_k = \operatorname{im} \mathcal{A}^k$

1. Покажем, что *подпространства N_k строго вложены друг в друга до некоторого момента q, начиная с кото–рого все N_k совпадают*, т.е. $N_1 \subset N_2 \subset ... \subset N_q = N_{q+1} = ...$

а)если $\mathcal{A}^k x = \theta$, то $\mathcal{A}^{k+1} x = \mathcal{A}(\mathcal{A}^k) x = \mathcal{A}\,\theta = \theta$ => $N_k \subseteq N_{k+1}$

б) Пусть $N_k = N_{k+1}$, тогда $N_{k+1} = N_{k+2}$, т. к. $N_{k+1} \subseteq N_{k+2}$, $N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$. 2–е вложение следует из того, что если $x \in N_{k+2}$, то $\mathcal{A}^{k+2} x = \theta$, т.е. $\mathcal{A}^{k+1}(\mathcal{A} x) = \theta$. Значит, $\mathcal{A} x \in N_{k+1} = N_k$ => $\mathcal{A}^k(\mathcal{A} x) = \theta$, т.е. $\mathcal{A}^{k+1} x = \theta$

Из "а" и "б" => подпространство N_k либо строго вложено в N_{k+1} , либо совпадает со всеми последующими ядрами. В конечномерном пр–ве размерности подпространств N_k не могут бесконечно возрастать => наступит момент q, начиная с которого все ядра N_k будут совпадать с N_q.

2. Зафиксируем это q и покажем, что $V = N_q \oplus T_q$. По теореме о ранге и дефекте ($\operatorname{rg} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = \dim V$):

$\dim V = \dim N_q + \dim T_q$, при этом $N_q \cap T_q = \{\theta\}$, т. к. если $y \in N_q$, $y \in T_q$, то $\mathcal{A}^q y = \theta$, $y = \mathcal{A}^q x$, т.е. $\mathcal{A}^{2q} x = \theta$. Значит, $x \in N_{2q} = N_q$ и $\mathcal{A}^q x = \theta$ => $y = \theta$.

3. Подпространства N_q , T_q *инвариантны отн–но $\mathcal{A}$*, ибо:

а) если $x \in N_q$, то $x \in N_{q+1} = N_q$ => $\mathcal{A}^{q+1} x = \theta$, т.е. $\mathcal{A}^q(\mathcal{A} x) = \theta$ => $\mathcal{A} x \in N_q$

б) если $y \in T_q$, то $y = \mathcal{A}^q x$ и $\mathcal{A} y = \mathcal{A}^{q+1} x = \mathcal{A}^q(\mathcal{A} x) = \mathcal{A}^q x_1$, где $x_1 = \mathcal{A} x$ => $\mathcal{A} y \in T_q$.

4. $\mathcal{A} \mid N_q$ – *нильпотентный оператор индекса q*, так как:

а) $\mathcal{A}^q x = \theta$ для $\forall x \in N_q$

б) $\exists\, x_0 \in N_q$: $\mathcal{A}^{q-1} x_0 \neq \theta$, ибо $N_{q-1} \neq N_q$

5. Оператор $\mathcal{A} \mid T_q$ *обратим*, т. к. $\ker \mathcal{A} \mid T_q = \{\theta\}$. Действительно, если $y \in \ker \mathcal{A} \mid T_q$, то $y \in T_q$, $\mathcal{A} y = \theta$, т.е. $y = \mathcal{A}^q x$ и $\mathcal{A}^{q+1} x = \theta$ => $x \in N_{q+1} = N_q$, т.е. $\mathcal{A}^q x = \theta$ и $y = \theta$.

Из пп. 2–5 => ∃ искомое разложение: $L_1 = N_q$, $L_2 = T_q$.

Единственность. Пусть ∃ другое разложение $V = N \oplus T$ со всеми свойствами 1–го.

1. Нильпотентность $\mathcal{A} \mid N$ => $\mathcal{A}^k x = \theta$, $\forall x \in N$, при некотором $k \in \mathbb{N}$ => $N \subseteq N_k \subseteq N_q$ и $\dim N \leq \dim N_q$ **(1)**

2. Обратимость $\mathcal{A} \mid T$ => $\operatorname{im} \mathcal{A} \mid T = T$ => для $\forall y \in T$:

$y = \mathcal{A} y_1$, где $y_1 \in T$. => для y_1 и всех последующих:

$y = \mathcal{A} y_1 = \mathcal{A}^2 y_2 = ... = \mathcal{A}^q y_q$ => $T \subseteq T_q$ и $\dim T \leq \dim T_q$ **(2)**

Т.к. $\dim N + \dim T = \dim V = \dim N_q + \dim T_q$, то из (1), (2) => $N = N_q$, $T = T_q$ •

С2. *Оператор $\mathcal{A}$ на N_q имеет только 0–е собственные значения, а на T_q не имеет 0–ых собственных значений.* => из Т3 с учетом Т2 и того, что обратимый оператор не вырожден.

С3. *Для оператора $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пр–ве V, с характеристическим многочленом*

$f(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) = (-\lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} ... (\lambda_p - \lambda)^{mp}$:

а) характеристические многочлены $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ операторов $\mathcal{A} \mid N_q$ и $\mathcal{A} \mid T_q$ имеют вид

$$f_1(\lambda) = (-\lambda)^{m1}, \quad f_2(\lambda) = (\lambda_2 - \lambda)^{m2} ... (\lambda_p - \lambda)^{mp} \quad \textbf{(3)}$$

б) при этом $\dim N_q = m1$, $\dim T_q = m2 + ... + mp$ **(4)**

Соотношение (3) вытекает из (*Если $V = L_1 \oplus ... \oplus L_k$ – прямая сумма подпространств $L_1, ..., L_k$, инвариантных относительно оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, то характеристи–ческий многочлен $f(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ равен произведению характеристических многочленов $f_1(\lambda), ..., f_k(\lambda)$ индуцированных операторов $\mathcal{A} \mid L_1 ,... , \mathcal{A} \mid L_k$:*

$f(\lambda) = f_1(\lambda) ... f_k(\lambda)$), если учесть, что $f_2(0) \neq 0$. Соотношение (4) следует из (3), т.к. размерность пр–ва совпадает со степенью характеристического многочлена.

26. Корневые подпространства. Расщепление линейного пр–ва в прямую сумму

Т1 (о расщеплении ЛО). *Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пр–ве V, с характеристическим мн–ном*
$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{mp}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ *при $i \neq j$* **(1)**
$\exists$ *инвариантные подпространства $K_{\lambda 1}$,..., $K_{\lambda p}$* :

$$V = K_{\lambda 1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda p} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\dim K_{\lambda j} = m_j\ , j = \overline{1,p} \qquad \textbf{(3)}$$

$$f_j(\lambda) = \det(\mathcal{A} \mid K_{\lambda j} - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda_j - \lambda)^{mj}, j = \overline{1,p} \qquad \textbf{(4)}$$

Док–во. а) если $\lambda_{\mathcal{A}}$ и $\lambda_{\mathcal{B}}$ – собственные значения операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I}$ $\Rightarrow$ $\lambda_{\mathcal{B}} = \lambda_{\mathcal{A}} - \lambda_0$ **(5)**

б) если L инвариантно относительно $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I}$, то L инвариантно относительно $\mathcal{A}$, т.к. если $x \in L$, то $\mathcal{B}x = y \in L$, т.е. $(\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{I})\,x = y \in L \Rightarrow \mathcal{A}x = \lambda_0 x + y \in L$.

1–й шаг. Применив к $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{I}$ Т*($\forall$ *ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов, причем это разложение единственно*), получим подпространства N_{q1} и T_{q1}, которые с учетом (5) обладают следующими свойствами:
$V = N_{q1} \oplus T_{q1}$
N_{q1} и T_{q1} инвариантны относительно $\mathcal{B}_1$
$\dim N_{q1} = m_1$ и $\dim T_{q1} = m_2 + \dots + m_p$
$\det(\mathcal{B}_1 \mid N_{q1} - \lambda\mathcal{I}) = (-\lambda)^{m1}$
$\det(\mathcal{B}_1 \mid T_{q1} - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda)^{m2} \dots (\lambda_p - \lambda_1 - \lambda)^{mp}$
Положив $K_{\lambda 1} = N_{q1}$, $V_1 = T_{q1}$, получим подпространства $K_{\lambda 1}$ и V_1, инвариантные относительно $\mathcal{A}$ (согласно п. "б"):
$V = K_{\lambda 1} \oplus V_1$
$\dim K_{\lambda 1} = m_1$ и $\dim V_1 = m_2 + \dots + m_p$ **(6)**
$\det(\mathcal{A} \mid K_{\lambda 1} - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1}$
$\det(\mathcal{A} \mid N_1 - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{mp}$

2–й шаг: применить 1–ый шаг к оператору $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \mid V_1$, получим подпространства $K_{\lambda 2}$ и V_2 , обладающие
свойствами (6) с очевидными изменениями. Через $p - 1$ шагов получим все подпространства $K_{\lambda 1}$,..., $K_{\lambda p} = V_{p-1}$, удовлетворяющие требованиям теоремы. •

Из Т1 и Т (*Если пр–во V является прямой суммой подпространств L_1, ..., L_k , инвариантных относительно*
$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, то в пр–ве V $\exists$ базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональную форму.) $\Rightarrow$

Сл. *Для $\forall$ ЛО, действующего в комплексном пр–ве, $\exists$ базис, в котором его матрица имеет квазидиагональную форму, у которой число диагональных клеток совпадает с числом различных собственных значений, а их размеры – с алгебраическими кратностями собственных значений,* или, в матричной формулировке, $\forall$ *квадратная комплексная матрица подобна квазидиагональной матрице, обладающей указанным выше свойством.*

З. Разложение (2) со свойствами из Т1, для каждого оператора единственно в силу Т*.

Пусть λ_j – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Вектор $x \in V$ называется ***корневым вектором*** оператора $\mathcal{A}$, ***отвечающим собственному значению*** λ_j, если
$(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^k x = \theta$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. ***Высота*** корневого вектора – наименьшее k, обладающее указанным свойством. Только высота 0–го корневого вектора = 0.

Из определения => свойства корневых векторов:
1°. *Корневые векторы высоты 1 являются собственными векторами,* т.к. $(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})\,x = \theta$, $x \neq \theta$.
2°. *Если x – корневой вектор высоты $k > 0$, то вектор $(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})\,x$ – корневой вектор высоты $k - 1$.*
3°. *Если x – корневой вектор высоты $k > 0$, то векторы x, $(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})\,x$, ..., $(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{k-1} x$ линейно независимы.*
Док–во. К $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})\,x_0 + \dots, \alpha_{k-1} (\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{k-1} x_0 = \theta$ применим последовательно $(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{k-1}$, $(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{k-2}$, ... ,
$(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I}) \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$=> линейная незав–сть.
4°. *Корневые векторы различных высот линейно незав–мы.*
Корневые векторы высоты $k > 1$ – ***присоединенные векторы*** **(k – 1)–го *порядка***. Если x – присоединенный вектор $(k - 1)$–го порядка, то $(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^k x = \theta$,
$(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{k-1} x \neq \theta$,т.е, $(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{k-1} x$ – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ_j. Т.о., корневой вектор – это θ | собственный | присоединенный.

Множество всех корневых векторов оператора $\mathcal{A}$, отвеча–ющих собственному значению λ_j, называется ***корневым подпространством*** оператора $\mathcal{A}$, ***отвечающим собстве–нному*** λ_j: $K_{\lambda j} = \{x \in V \mid \exists\, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0: (\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^k x = \theta\}$.

Структура корневого подпространства:
Пусть $N_k = \ker(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^k$. Тогда подпространства N_k строго вложены друг в друга до некоторого q, начиная с которого все N_k совпадают: $N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = N_{q+1} = \dots$ **(7)**
а)$(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^k x = \theta \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{k+1} x = (\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})((\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^k)\,x = = (\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})\,\theta = \theta \Rightarrow N_k \subseteq N_{k+1}$
б) Пусть $N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2}$, т. к. $N_{k+1} \subseteq N_{k+2}$,
$N_{k+2} \subseteq N_{k+1}$. 2–е вложение следует из : если $x \in N_{k+2}$, то
$(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{k+2} x = \theta \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{k+1} ((\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})\,x) = \theta \Rightarrow$
$(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})\,x \in N_{k+1} = N_k \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^k((\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})\,x) = \theta \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^{k+1} x = \theta$
Из "а" и "б" => N_k либо строго вложено в N_{k+1} , либо совпадает со всеми последующими ядрами => наступит момент q, начиная с которого все N_k будут совпадать с N_q
1. N_1 состоит из корневых векторов высоты, не превосходящей 1, т.е. из θ и всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_j , т.е. совпадает с собственным подпространством $W_{\lambda j}$ =>
$N_1 = W_{\lambda j}$ **(8)** => $\dim N_1 = s_j$ **(9)**
s_j – геометрическая кратность собственного значения λ_j .
2. Подпространство N_2 в (7) состоит из корневых векторов высоты ≤ 2, а подпространство N_q состоит из корневых векторов всех высот, т.е. совпадает с корневым подпространством $K_{\lambda j}$ => q – максимальная высота корневого вектора, отвечающего λ_j :
$K_{\lambda j} = \ker(\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I})^q$ и $W_{\lambda 1} = N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = K_{\lambda j}$ **(10)**
=> подпространства $K_{\lambda 1}$,..., $K_{\lambda p}$, построенные при док–ве Т1, совпадают с корневыми подпространствами, отвечаю–щими собственным значениям λ_1 , ..., λ_p соответственно => корневые подпространства обладают свой–ствами (2)–(4).
3. Из (10) => максимальная высота q корневых векторов, отвечающих собственному значению λ_j , совпадает с индексом нильпотентности оператора $\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{I}$ и согласно св–ву 3° не превосходит размерности $K_{\lambda j}$, т.е. алгебраической кратности собственного значения λ_j .
4. Из (10) => собственное подпространство $W_{\lambda j}$ является подпространством корневого подпространства $K_{\lambda j}$, так что $s_j \leq m_j$. При этом $W_{\lambda j} = K_{\lambda j} \Leftrightarrow s_j = m_j$.

27. Жорданов базис и жорданова матрица ЛО. Канонический базис корневого подпространства.

Пусть $K_{\lambda j}$ – корневое подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее собственному значению λ_j. Положим

$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I}$, $N_k = \ker \mathcal{B}^k$, $n_k = \dim N_k$, $r_k = \mathrm{rg}\ \mathcal{B}^k$. Построим корневое подпространство $K_{\lambda j}$. Сначала найти момент q, начиная с которого все ядра N_k будут совпадать с $N_q = K_{\lambda j}$. В силу $\dim N_1 = s_j$ и $\dim K_{\lambda j} = m_j$: $n_1 = s_j < n_2 < \ldots < n_q = m_j$, где s_j и m_j – геометрическая и алгебраическая кратности λ_j. Базис $K_{\lambda j}$ строится, последовательно просматривая N_q, N_{q-1}, …, N_1.

N_q) Пусть $f_1, \ldots, f_{tq}$ – векторы, дополняющие ∀ базис N_{q-1} до базиса N_q :
1) это корневые векторы высоты q
2) их количество равно $n_q - n_{q-1}$
3) $t_q = n_q - n_{q-1} = (n_q - n_{q-1}) - (n_{q+1} - n_q) = -n_{q+1} + 2n_q - n_{q-1}$, т.к. $n_{q+1} = n_q$
4) никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов $\notin N_{q-1}$ (*линейно независимыми над* N_{q-1}).

N_{q-1}) Построим векторы $\mathcal{B}f_1, \ldots, \mathcal{B}f_{tq}$: корневые векторы высоты $q-1$ и линейно независимы над N_{q-2}, т.к. иначе для нетривиального набора $\alpha_1, \ldots, \alpha_{tq}$: $\mathcal{B}^{q-2}\sum_{k=1}^{tq}\alpha_k \mathcal{B}f_k = \theta$, т.е. $\mathcal{B}^{q-1}\sum_{k=1}^{tq}\alpha_k f_k = \theta$ и $\sum_{k=1}^{tq}\alpha_k f_k \in N_{q-1}$, что противоречит линейной независимости $f_1, \ldots, f_{tq}$ над N_{q-1}.

Дополним векторами $g_1, \ldots, g_{tq-1}$ так, чтобы $\mathcal{B}f_1, \ldots, \mathcal{B}f_{tq}, g_1, \ldots, g_{tq-1}$ дополняли ∀ базис N_{q-2} до базиса N_{q-1} :
1) это корневые векторы высоты $q-1$;
2) их количество равно $n_{q-1} - n_{q-2}$;
3) $t_{q-1} = (n_{q-1} - n_{q-2}) - (n_q - n_{q-1}) = -n_q + 2n_{q-1} - n_{q-2}$
4) они линейно независимы над N_{q-2}

N_{q-2}) Ан–но строятся $\mathcal{B}^2 f_1, \ldots, \mathcal{B}^2 f_{tq}, \mathcal{B}g_1, \ldots, \mathcal{B}g_{tq-1}, h_1, \ldots, h_{tq-2}$, дополняющие ∀ базис N_{q-3} до базиса N_{q-2}.

…

N_1) Строятся $\mathcal{B}^{q-1}f_1, \ldots, \mathcal{B}^{q-1}f_{tq}, \mathcal{B}^{q-2}g_1, \ldots, \mathcal{B}^{q-2}g_{tq-1}, \ldots,$
$\mathcal{B}v_1, \ldots, \mathcal{B}v_{t2}$, дополняются векторами $u_1, \ldots, u_{t1}$ до базиса N_1. Они :
1) являются собственными векторами;
2) их количество равно $n_1 = n_1 - n_0$ ($n_0 = \mathrm{def}\ \mathcal{B}^0 = 0$);
3) $t_1 = (n_1 - n_0) - (n_2 - n_1) = -n_2 + 2n_1 - n_0$
4) они линейно независимы.

Полученная за q шагов система – ***жорданова лестница.***

T1. *Построенная система векторов образует базис корневого подпространства* $K_{\lambda j}$.

Док–во. Кол–во векторов в этой системе $= \dim K_{\lambda j}$, т.к. $n_1 + (n_2 - n_1) + (n_3 - n_2) + \ldots + (n_q - n_{q-1}) = n_q = \dim K_{\lambda j}$. Они линейно независимы, т.к. если приравнять их линейную комбинацию θ и последовательно применить $\mathcal{B}^{q-1}, \mathcal{B}^{q-2}, \ldots, \mathcal{B}$, то все коэффициенты $= 0$. •

Полученный базис называется ***каноническим* (или *жордановым*) *базисом корневого подпространства*** $K_{\lambda j}$.

Матрица оператора $\mathcal{A} / K_{\lambda j}$ в каноническом базисе.

1. Пусть $e_1, \ldots, e_q$ – векторы 1–го столбца лестницы:

$$\begin{cases} e_1 = \mathcal{B}^{q-1}f_1 \\ e_2 = \mathcal{B}^{q-2}f_1 \\ \ldots \\ e_q = f_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{B}e_1 = \theta \\ \mathcal{B}e_2 = e_1 \\ \ldots \\ \mathcal{B}e_q = e_{q-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})e_1 = \theta \\ (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})e_2 = e_1 \\ \ldots \\ (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})e_q = e_{q-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}e_1 = \lambda_j e_1 \\ \mathcal{A}e_2 = \lambda_j e_2 + e_1 \\ \ldots \\ \mathcal{A}e_q = \lambda_j e_q + e_{q-1} \end{cases} \quad (1)$$

Этой группе векторов соответствуют 1-ые q столбцов матрицы $\mathcal{A} / K_{\lambda j}$ в каноническом базисе, которые согласно (1) имеют вид $\begin{bmatrix} J_q(\lambda_j) \\ O \end{bmatrix}$ **(2)**

где $J_q(\lambda_j)$ – клетка Жордана q–го порядка с λ_j на главной диагонали. Так же устроены столбцы матрицы

$\mathcal{A} / K_{\lambda j}$, определяемые векторами 2–го столбца: диагональная клетка имеет тот же вид $J_q(\lambda_j)$, а все остальные элементы $= 0$ => 1–я группа из t_q столбцов порождает клетки Жордана q–го порядка с λ_j на главной диагонали. Число этих клеток $= t_q$.

2. Следующая группа из t_{q-1} столбцов определяет клетки $J_{q-1}(\lambda_j)$ на главной диагонали матрицы $\mathcal{A} / K_{\lambda j}$. Число клеток $(q-1)$–го порядка равно t_{q-1}.

3. Рассмотрев все столбцы жордановой лестницы, получим матрицу A, оператора $\mathcal{A} / K_{\lambda j}$ в каноническом базисе. A_j – квазидиагональная матрица с клетками Жордана $J_k(\lambda_j)$ на главной диагонали. Всего этих клеток столько, сколько столбцов в жордановой лестнице, т.е. n_1 или, согласно ($\dim N_1 = s_j$), s_j (геометрическая кратность λ_j) =>

$$A_j = \begin{bmatrix} J_{q1}(\lambda_j) & & O \\ & J_{q2}(\lambda_j) & \\ & \ldots & \\ O & & J_{q_{sj}}(\lambda_j) \end{bmatrix} \quad \mathbf{(3)}$$

где $q_1 + \ldots + q_{sj} = \dim K_{\lambda j} = m_j$, а число клеток k–го порядка : $t_k = -n_{k-1} + 2n_k - n_{k+1}$, $k = \overline{1,q}$.

4. Матрица A_j определена однозначно с точностью до порядка клеток, т.к. количество всех клеток равно геометрической кратности s_j собственного значения λ_j, а количество клеток k – го порядка равно числу $t_k = -n_{k-1} + 2n_k - n_{k+1}$, $k = \overline{1,q}$, или, согласно ($\mathrm{rg}\ \mathcal{A} + \mathrm{def}\ \mathcal{A} = \dim V$), $t_k = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$, $k = \overline{1,q}$

=> структура клеток Жордана в матрице A_j определяется только оператором $\mathcal{A}$. Порядок клеток определен порядком нумерации столбцов жордановой лестницы.

Жорданова форма матрицы ЛО в комплекс. пр–ве.

m_j и s_j – алгебраическая и геометрическая кратность λ_j,
$r_k = \mathrm{rg}\ (\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^k$.

T2. *Пусть* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ *– ЛО, действующий в комплек–сном пр–ве V, и его характеристический многочлен имеет вид* $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{mp}$, *где*
$\lambda_i \neq \lambda_j$ *при* $i \neq j$. *Тогда в пр–ве V ∃ базис e, в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *имеет квазидиагональную форму*

$$A_e = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ & \ldots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{(4)}$$

в которой матрицы A_j, $j = \overline{1,p}$, *имеют вид* (3).

Док–во. По T*, $V = K_{\lambda 1} \oplus \ldots \oplus K_{\lambda p}$. В качестве искомого базиса e возьмем совокупность канонических базисов корневых подпространств $K_{\lambda 1}, \ldots, K_{\lambda p}$. По T** матрица A_e имеет вид (4), где A_j – матрица оператора $\mathcal{A} / K_{\lambda j}$ в каноническом базисе $K_{\lambda j}$ => матрица A_j имеет вид (3). •

Сл. *Для собственных значений оп–ра* $\mathcal{A}$ *верны соотношения* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \mathrm{tr}\ \mathcal{A}$, $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det \mathcal{A}$

Полученная форма матрицы линейного оператора – ***жорданова форма***, а построенный базис – ***канонический* (*жорданов*) *базис***.

3. В матричной формулировке T2: ∀ *квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей жорданову форму.*

Док–во. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – заданная матрица. Рассмотрим ∀ комплексное пр–во V размерности n. Зафиксируем в пр–ве V ∀ базис f. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, матрица которого в базисе f совпадает с матрицей A: $A = A_f$ (по T*** такой оператор ∃). В силу T2 ∃ базис e, в котором матрица A_e оператора $\mathcal{A}$ имеет квазидиагональ–ную форму. При переходе от базисе e к базису $f = eQ$ матрица оператора изменяется по закону $A_f = Q^{-1} A_e Q$. Это равносильно их подобию. •

Матрица A_e, имеющая жорданову форму и подобная матрице A, называется ***жордановой формой матрицы*** A.

*: (о расщеплении ЛО) *Для ∀ ЛО* $\mathcal{A}$*, действующего в комплексном пр–ве V, с характеристическим многочленом*

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{mp} \quad \text{где} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{при } i \neq j$$

∃ *инвариантные подпространства* $K_{\lambda 1}, \ldots, K_{\lambda p}$:

$$V = K_{\lambda 1} \oplus \ldots \oplus K_{\lambda p}$$
$$\dim K_{\lambda j} = m_j, \ j = \overline{1,p}$$
$$f_j(\lambda) = \det(\mathcal{A} / K_{\lambda j} - \lambda \mathcal{I}) = (\lambda_j - \lambda)^{mj}, \ j = \overline{1,p}$$

****:** *Если пр–во V является прямой суммой подпространств* $L_1, \ldots, L_k$, *инвариантных относительно оператора* $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$, *то в пр–ве V ∃ базис, в котором матрица оператора* $\mathcal{A}$ *имеет квазидиагональную форму.*

***: *Пусть* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда ∃ взаимно однозначное соответствие между ЛО из* $\mathcal{L}(V, W)$ *и матрицами из* $P^{m\times n}$

28. Критерий подобия матриц.

2 матрицы A, B называются ***эквивалентными*** ($A \sim B$), если $\exists$ невырожденные матрицы P и Q : $A = PBQ$.

Квадратные матрицы A, B называются ***подобными***, если $\exists$ невырожденная матрица Q : $A = Q^{-1}BQ$.

Матрица A_e, имеющая жорданову форму и подобная матрице A, называется ***жордановой формой матрицы А.***

Т. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ подобны $\Leftrightarrow$ их жордановы формы совпадают.*

Док–во. Из Т* => 2 квадратные матрицы $A, B \in P^{n\times n}$ одинакового порядка над общим полем подобны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одного и того же ЛО, действующего в n–мерном линейном пространстве над полем P. А т.к. $\forall$ квадратная комплексная матрица подобна матрице, имеющей жорданову форму, то отсюда следует утверждение теоремы. •

*****: *2 матрицы A и B над полем P одинакового размера $m\times n$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одного и того же ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, где V и W – линейные пр–ва над полем P размерностей n и m соотв–но.*

29. Теорема Гамильтона–Кэли. Минимальный многочлен.

Т(Гамильтона—Кэли). *ЛО, действующий в комплексном* (*или в вещественном*) *пр–ве, является корнем своего характеристического многочлена.*

Док–во. 1. Для комплексного пр–ва V. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ и его характеристический многочлен:

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{mp}, \ \lambda_i \neq \lambda_j \ \text{при } i \neq j \quad \mathbf{(1)}$$

По Т (*), $V = K_{\lambda 1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda p}$ => для $\forall x \in V$ $\exists$ разложение $x = x_1 + \dots + x_p$, где $x_j \in K_{\lambda j}$, $j = \overline{1, p}$. =>

$$f(\mathcal{A})\, x = f(\mathcal{A})\, x_1 + \dots + f(\mathcal{A})\, x_j + \dots + f(\mathcal{A})\, x_p .$$

$\forall$ слагаемое в этом разложении $= \theta$, т. к.

$f(\mathcal{A})\, x_j = (\lambda_1 \mathcal{I} - \mathcal{A})^{m1} \dots (\lambda_j \mathcal{I} - \mathcal{A})^{mj} \dots (\lambda_p \mathcal{I} - \mathcal{A})^{mp} x_j = \theta$, ибо операторы в этом произведении перестановочны, а $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})^{mj} x_j = \theta$ в силу ($W_{\lambda 1} = N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_q = K_{\lambda j}$) => $f(\mathcal{A})\, x = \theta$, $\forall x \in V$, т.е. $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

2. Пусть V – вещественное линейное пр–во. Пусть e – базис пр–ва V и A_e – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Достаточно показать, что $f(A_e) = O$. Рассмотрим $\forall$ комплексное пр–во V_1 той же размерности, что и V. Пусть f – $\forall$ базис V_1 => A_e является матрицей оператора $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V_1, V_1)$ в базисе f, т.е. $A_e = B_f$ => характеристические многочлены $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ совпадают и, по п. 1 док–ва, $f(A_e) = O$. •

Многочлен $f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_m$ называется ***аннулирующим*** для матрицы A, если

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_m I = 0 .$$

Пусть $a_0 = 1$. Если $f_n(\lambda)$ – характеристический многочлен для матрицы A, то по теореме Гамильтона – Кэли $f_n(A)=0$ => характеристический многочлен – один из аннулирующих многочленов A. Многочлен $f_n(\lambda)$ имеет степень n, но может оказаться, что $\exists$ многочлен $\psi(\lambda)$ степени меньшей n, аннулирующий для матрицы A. Такой многочлен наименьшей степени называют ***минимальным многочленом*** матрицы A. Его свойства:

1) $\forall$ аннулирующий многочлен нацело делится на минимальный многочлен. Пусть $f(\lambda)$ есть такой многочлен. Если разделить его на $\psi(\lambda)$, то его можно представить в виде $f(\lambda) = \psi(\lambda)\, Q(\lambda) + r(\lambda)$, где $r(\lambda)$ имеет степень, меньшую чем $\psi(\lambda)$. Т.к. $f(A) = 0$ и $\psi(A) = 0$ => $r(A) = 0$, что возможно только если $r(\lambda) \equiv 0$ => $f(\lambda)$ нацело делится на $\psi(\lambda)$.

2) Из п. 1) => характеристический многочлен нацело делится на минимальный многочлен => корни минимального многочлена являются собственными числами матрицы A.

3) Минимальный многочлен матрицы – единственный. Если бы существовало 2 минимальных многочлена я $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$, то разность между ними $r(\lambda) = \psi_1(\lambda) - \psi_2(\lambda)$ была бы аннулирующим многочленом для A, степень которого меньше, чем $\psi_1(\lambda)$ и $\psi_2(\lambda)$, что противоречит их минимальности.

Т.о, если $f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{mp}$ где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, и $m1 + \dots + mp = n$, то минимальным многочленом является

$\psi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n1} (\lambda_2 - \lambda)^{n2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{np}$, $0 < ni \leq mi$.

----

*: (о расщеплении ЛО) *Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A}$, действующего в комплексном пр–ве V, с характеристическим многочленом*

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m1} (\lambda_2 - \lambda)^{m2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{mp}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \ \text{при } i \neq j$$

$\exists$ *инвариантные подпространства* $K_{\lambda 1}, \dots, K_{\lambda p}$:

$$V = K_{\lambda 1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda p}$$

$$\dim K_{\lambda j} = mj, \ j = \overline{1, p}$$

$$f_j(\lambda) = \det(\mathcal{A} / K_{\lambda j} - \lambda \mathcal{I}) = (\lambda_j - \lambda)^{mj}, \ j = \overline{1, p}$$

30. Инвариантные подпространства минимальной размерности.

Пусть V – линейное пр–во над полем P и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$. Линейное подпространство L пр–ва V называется ***инвариантным подпространством относительно оператора*** $\mathcal{A}$, если для $\forall\, x \in L$: $\mathcal{A}x \in L$.

Характеристическим многочленом матрицы $A \in P^{n \times n}$ называется функция $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, $\lambda \in P$

Т1. *У всякого ЛО в комплексном пр–ве ∃ одномерное инвариантное подпространство.*

Док–во. Утверждение следует из существования собственного вектора для ∀ оператора, действующего в комплексном пр–ве (Т*): если e – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, то $\mathcal{L}(e)$ – одномерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. •

Т2. *У всякого ЛО в вещественном пр–ве ∃ 1–мерное или 2–мерное инвариантное подпространство.*

Док–во. Пусть V – вещественное пр–во, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$,

$e = (e_1, \ldots, e_n)$ – базис V и A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе e.

Характеристический многочлен $f(\lambda)$ оператора $\mathcal{A}$ – многочлен с вещественными коэффициентами, т.к. $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Пусть λ_0 – корень характеристического многочлена.

1. Если $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, то λ_0 – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Тогда линейная оболочка $\mathcal{L}(e)$, натянутая на соответствующий собственный вектор e, образует 1–мерное подпространство, инвариантное отн–но $\mathcal{A}$.

2. Если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, то $|A - \lambda_0 I| = 0$ и система уравнений $Az = \lambda_0 z$ **(1)** над полем $\mathbb{C}$ имеет нетривиальное решение $z_0 = (x_1 + i\, y_1, \ldots, x_n + i\, y_n)^T$.

В обозначениях $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}$ система (1) : $A(x + i\,y) = (\alpha + i\beta)(x + i\,y)$ или

$$\begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \beta x + \alpha y \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

Тогда, если $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, то системе (2) соответствует система векторных уравнений

$$\begin{cases} Au = \alpha u - \beta v \\ Av = \beta u + \alpha v \end{cases} \quad \textbf{(3)}$$

где u и v – векторы пр–ва V, одновременно ≠ 0. Из (3) => $\mathcal{L}(u,v)$ – инвариантное подпространство dim = 2.•

----

*: *Произвольный ЛО, действующий в n–мерном комплексном пр–ве, имеет:*

1) *n собственных значений, если каждое собственное значение считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена;*

2) *хотя бы 1 собственный вектор;*

3) *на ∀ своем инвариантном подпространстве хотя бы 1 собственный вектор.*

31. Вещественный аналог жордановой формы.

Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ имеет жорданову клетку $J_q(\lambda)$ порядка q для комплексного собственного значения $\lambda = \alpha + i\,\beta$ с мнимой частью $\beta \neq 0$ => ∃ жорданова цепочка:

$$\begin{cases} Ae_1 = \lambda_j e_1 \\ Ae_2 = \lambda_j e_2 + e_1 \\ \qquad \ldots \\ Ae_q = \lambda_j e_q + e_{q-1} \end{cases}$$

Представим e_j в виде $e_j = x_j + i\, y_j$, где x_j , $y_j \in \mathbb{R}^n$ =>

$A\,[x_1, y_1, \ldots, x_q, y_q] = [x_1, y_1, \ldots, x_q, y_q]\, M_{2q}$, где

$$M_{2q} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & & & & \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & & & & \\ & & \alpha & \beta & 1 & 0 & & \\ & & -\beta & \alpha & 0 & 1 & & \\ & & & & \ldots & & & \\ & & & & & & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ & & & & & & -\beta & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \in R^{(2q)\times(2q)} \quad (*)$$

Линейная оболочка $\mathcal{L}(x_1, y_1, \ldots, x_q, y_q) \subset \mathbb{R}^n$ является инвариантным подпространством размерности $2q$, совпадающим с прямой суммой двух подпространств – корневого пространства матрицы A для собственного значения $\lambda = \alpha + i\,\beta$ и корневого пространства для сопряженного собственного значения $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ (в силу вещественности коэффициентов характеристического многочлена, $\overline{\lambda}$ и λ оба являются собственными значениями матрицы A одинаковой кратности). Из сказанного вытекает

Т. ∀ *матрица* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *с помощью вещественного преобразования подобия приводится к прямой сумме вещественных жордановых блоков и вещественных блоков вида* (*).

32. Сопряженный оператор. Существование и единственность. Матрица сопряженного оп-ра.

V и W – 2 пр–ва, оба унитарных или оба евклидовых.

T1. *Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и $(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{B}x, y)$, $\forall x \in V$, $y \in W$, то $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.*

Док–во. $(\mathcal{A}x, y)=(\mathcal{B}x, y)$, $\forall x \in V$, $y \in W$ => $(\mathcal{A}x–\mathcal{B}x, y)=0$, $\forall y \in W$ => $\mathcal{A}x – \mathcal{B}x = \theta$ => $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$ $\forall x \in V$ => $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

3. Из $(x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{B}y)$, $\forall x \in V$, $y \in W$ => $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение $\mathcal{A}^*$: $W \to V$ называется ***сопряженным оператором*** к *оператору* $\mathcal{A}$, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$, $\forall x \in V$, $y \in W$ **(1)**

T2. *Сопряженный оператор линеен.*

Док–во. Пусть $y_1, y_2 \in W$ => из (1)

$$(\mathcal{A}x, (y_1 + y_2)) = (x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2)) \quad \mathbf{(2)}$$

С другой стороны, $(\mathcal{A}x, (y_1 + y_2)) = (\mathcal{A}x, y_1) + (\mathcal{A}x, y_2) = = (x, \mathcal{A}^*y_1) + (x,\mathcal{A}^*y_2)= (x, \mathcal{A}^*y_1 +\mathcal{A}^*y_2)$ => с учетом (2): $(x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2) – (\mathcal{A}^*y_1 +\mathcal{A}^*y_2)) = 0$, $\forall x \in V$ =>

$\mathcal{A}^*(y_1 + y_2) = (\mathcal{A}^*y_1 +\mathcal{A}^*y_2)$, $\forall y_1, y_2 \in W$ **(3)**

Пусть $y \in W$, $\alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ => из (1)

$$(\mathcal{A}x, \alpha y) = (x, \mathcal{A}^*(\alpha y)) \quad \mathbf{(2^*)}$$

С другой стороны, $(\mathcal{A}x, \alpha y) = \alpha(\mathcal{A}x, y) = \alpha(x, \mathcal{A}^*y) = (x, \alpha\mathcal{A}^*y)$ => учетом (2*) : $(x, \mathcal{A}^*(\alpha y) – \alpha\mathcal{A}^*y)=0$, $\forall x \in V$ => $\mathcal{A}^*(\alpha y) = \alpha\mathcal{A}^*y$, $\forall y \in W$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ **(4)**

Из (3), (4) => линейность $\mathcal{A}^*$ •

T3. *Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ $\exists$! сопряженный оператор.*

Док–во. Существование. Пусть $e_1,..., e_n$ – ОНБ V => для $\forall x \in V$ имеет место разложение

$$x = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k => Ax = \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)\mathcal{A}e_k => (\mathcal{A}x, y)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)(\mathcal{A}e_k, y), \quad \forall y \in W \quad \mathbf{(5)}$$

Покажем, что сопряженным к $\mathcal{A}$ является оператор $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$, определенный равенством

$$\mathcal{B}y = \sum_{k=1}^{n}(y, \mathcal{A}e_k)e_k, \quad \forall y \in W$$
$$\text{Из } (x, \mathcal{B}y) = (x, \sum_{k=1}^{n}(y, \mathcal{A}e_k)e_k) = \sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A}e_k, y)(x, e_k)$$
$$+(5) => \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{B}y) => \ B = \mathcal{A}^*$$

Из T1 => единственность, т.к. для $\forall$ $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, сопряжен–ных к $\mathcal{A}$:$(x , \mathcal{B}y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{C}y)$, $\forall x \in V$, $y \in W$

T4. *Операция сопряжения ЛО обладает следующими свойствами:*

1) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* =\mathcal{A}^*+\mathcal{B}^*$, 4) $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$,

2) $(\alpha \mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\, \mathcal{A}^*$, 5) $(\mathcal{A}^*)^*=\mathcal{A}$,

3) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$,

выполненными для $\forall$ операторов, для которых определены указанные операции.

*Док–во***.** Из (1) и T1 и T2: $\forall$ x, y

1)$(x, (\mathcal{A} + \mathcal{B})^*y) = ((\mathcal{A} + \mathcal{B}) x, y) = (\mathcal{A}x + \mathcal{B}x, y) = =(\mathcal{A}x, y) + (\mathcal{B}x, y)=(x, \mathcal{A}^*y) + (x, \mathcal{B}^*y)=(x, (\mathcal{A}^*+\mathcal{B}^*) y)$

2)$(x, (\alpha\mathcal{A})^*y) = ((\alpha\mathcal{A}) x, y) = (\mathcal{A}x, \overline{\alpha} y) = (x, \mathcal{A}^*(\overline{\alpha}y)) = =(x, (\overline{\alpha}\, \mathcal{A}^*) y)$

3) $(x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^*y) = (\mathcal{A}\mathcal{B}x, y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*y)$

4) (очевидно, для невырожденных $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$) вытекает из св–ва 3, т.к. если $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I}$, то

$(\mathcal{A}^{-1})^*\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}^{-1})^* = \mathcal{I}$ => $(\mathcal{A}^{-1})^*$ обратный к $\mathcal{A}^*$.

5) $(x, (\mathcal{A}^*)^*y) = (\mathcal{A}^*x, y) =(x, \mathcal{A}y)$ •

Рассматриваем ЛО, действующие в одном пр–ве V, унитарном или евклидовом.

Две системы векторов x_1, ..., x_k и y_1, …, y_k в унитарном (евклидовом) пр–ве – ***биортогональны***, если

$$(x_i , y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases}1, & i = j\\ 0, & i \neq j\end{cases}$$

$\forall$ из 2–х биортогональных систем векторов линейно независима (для док–ва линейную комбинацию век–торов одной системы = θ и последовательно умножать равенство скалярно на векторы другой системы)

Биортогональные системы e_1, ..., e_n и f_1,..., f_n , образую–щие базисы пр–ва V, называют ***биортогональной парой базисов*** $(e_i, f_j) = \begin{cases}1, & i = j\\ 0, & i \neq j\end{cases}$ **(6)**

ОНБ биортогонален самому себе.

T5. *Для $\forall$ базиса e_1, ...,e_n унитарного (евклидова) пр–ва $\exists$! биортогональный базис f_1,..., f_n .*

Док–во. Согласно (6) вектор f_j $j = \overline{1,n}$ ортогонален всем e_1, ...,e_n, кроме e_j => $f_j \in L_j = \mathcal{L}^{\perp}(e_1, ..., e_{j–1}, e_{j+1}, …, e_n)$. dim L_j = 1. Если g – базис L_j, то $f_j = \alpha g$. Из (6) => $(f_j, e_i) = 1$ => $\alpha = 1/(g, e_i)$ => существование и единствен–ность векторов f_j $j = \overline{1,n}$ биортогонального базиса. •

T6. *В паре биортогональных базисов e и f унитарного (евклидова) пр–ва V матрицы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ связаны соотношением* $(\mathcal{A}^*)_f = (A_e)^H$ **(7)**

Док–во. Пусть $A_e = (a_{ij})$, $(\mathcal{A}^*)_f = (b_{ij})$ =>

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{k=1}^{n}a_{kj}e_k, \ \ \mathcal{A}^*f_i = \sum_{k=1}^{n}b_{ki}f_k$$

Умножим 1–е равенство скалярно на f_i :

$$(\mathcal{A}e_j, f_i) = \sum_{k=1}^{n}a_{kj}(e_k , f_i)$$
$$(\mathcal{A}e_j, f_i) = (e_j, \mathcal{A}^*f_i) = \left(e_j, \sum_{k=1}^{n}b_{ki}f_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\overline{b_{ki}}(e_j, f_k) = \overline{b_{ji}}$$

=> $a_{ij} = \overline{b_{ji}}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ => (7) •

Сл1. *В ОНБ e* $(\mathcal{A}^*)_e = (A_e)^H$

Сл2. *Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$:*

$$\det \mathcal{A}^* = \overline{\det \mathcal{A}}, \ \text{rg}\ \mathcal{A}^* = \text{rg}\ \mathcal{A}.$$

3. Нормальный оператор и нормальная матрица.

V – унитарное или евклидово пр–во. ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ ***нормальный***, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Комплексная или веще–ственная квадратная матрица ***нормальная***, если $AA^H = A^HA$.

З1. Из определения и Т* => оператор нормален ⇔ в ∀ ОНБ его матрица нормальна.

Т1. *Собственный вектор нормального оператора, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению* $\overline{\lambda}$.

Док–во. Если $\mathcal{A}$ – нормальный, то $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$ также нормален. Пусть x – собственный вектор $\mathcal{A}$, отвечающий λ =>

$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x = \theta$ и $((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x) = 0$.

Т.к. $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$, то $(x, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^*(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})x) = 0$, с учетом нормальности $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}$: $(x, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^*x) = 0$, т.е. $((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^*x, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^*x) = 0$ и $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^*x = \theta$ => по свойствам сопряжения ($(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$, $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$): $(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{I})x = \theta$, т.е. $\mathcal{A}^*x = \overline{\lambda}x$. •

С1. *Если* $\mathcal{A}$ *– нормальный, то* $\ker \mathcal{A} = \ker \mathcal{A}^*$ **(1)**

т.к. нетривиальные векторы ядра являются собственными векторами, отвечающими 0–ому собственному значению.

С2. *Если* $\mathcal{A}$ *– нормальный, то* $\ker \mathcal{A} = \mathrm{im}^{\perp}\mathcal{A}$, $\ker \mathcal{A}^* = \mathrm{im}^{\perp}\mathcal{A}^*$

(следует из $\ker \mathcal{A} = \mathrm{im}^{\perp}\mathcal{A}^*$, $\ker \mathcal{A}^* = \mathrm{im}^{\perp}\mathcal{A}$ и (1))

Т2. *Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

Док–во. Пусть $\mathcal{A}x = \lambda x$, $\mathcal{A}y = \mu y$, $\lambda \neq \mu$ => $(\mathcal{A}x, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$. Но, $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y) = \{$в силу Т1$\} = (x, \overline{\mu}y) = \mu(x, y)$ => $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$ и т.к. $\lambda \neq \mu$, то $(x, y) = 0$. •

ОНБ унитарного (евклидова) пр–ва, в котором матрица ЛО имеет треугольную форму, называется ***базисом Шура*** для этого оператора.

Т3 (критерий нормальности). *Оператор, действующий в унитарном пр–ве, нормален* ⇔ ∃ ОНБ *из собственных векторов этого оператора.*

Док–во. *Необх–сть*. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный оператор и e – его базис Шура (по теореме Шура (**) он ∃) =>

$$A_e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots a_{2n} \\ & \dots & \\ 0 & 0 & \dots a_{nn} \end{bmatrix} \quad (A_e)^H = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & 0 & \dots 0 \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \dots 0 \\ & \dots & \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots \overline{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

и, по теореме (*) и З1, $A_e(A_e)^H = (A_e)^HA_e$. Для диагональных элементов матриц последнего равенства:

$|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2 = |a_{11}|^2$, $|a_{22}|^2 + \dots + |a_{2n}|^2 = |a_{22}|^2$, $|a_{n-1,n-1}|^2 + |a_{n-1,n}| = |a_{n-1,n-1}|^2$

=> $a_{12} = a_{13} = \dots = a_{1n} = 0$, $a_{23} = a_{24} = \dots = a_{2n} = 0$, … , $a_{n-1,n} = 0$ => A_e имеет диагональную форму => базис Шура является ОНБ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Дост–сть. Пусть e – ОНБ из собственных векторов $\mathcal{A}$ =>

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (A_e)^H = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \overline{\lambda_2} & \\ & \dots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Из перестановочности диагональных матриц => A_e – нормальная матрица => по З1 $\mathcal{A}$ – нормальный оп–р. •

С3. *В унитарном пр–ве нормальный оператор* $\mathcal{A}$ *и его сопряженный* $\mathcal{A}^*$ *имеют общий ОНБ из собственных векторов.*

Т4. *Если ∀ собственный вектор оператора* $\mathcal{A}$*, действую–щего в унитарном пр–ве V, является собственным векто–ром сопряженного оператора* $\mathcal{A}^*$*, то* $\mathcal{A}$ *– нормальный.*

Док–во. ∀ оператор, действующий в комплексном пр–ве, имеет хотя бы 1 собственный вектор. Пусть $\dim V = n$ и

e_1 – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ => e_1 – собственный вектор оператора $\mathcal{A}^*$ и по Т(3*) подпространство

$L_{n-1} = \mathcal{L}^{\perp}(e_1)$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. В этом подпространстве ∃ собственный вектор $e_2 \in L_{n-1}$ оператора $\mathcal{A}$, при этом $e_2 \perp e_1$. Вектор e_2 также является собственным вектором $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{L}(e_2)$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$ => $L_{n-2} = \mathcal{L}^{\perp}(e_2)$ (т.е. ортогональное дополнение $\mathcal{L}(e_2)$ до L_{n-1}) инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$.

Поступая ан–но, построим ортогональную систему собственных векторов $e_1, \dots, e_n$ оператора $\mathcal{A}$ => векторы $e_1/|e_1|, \dots, e_n/|e_n|$ образуют ОНБ пр–ва V, состоящий из собственных векторов $\mathcal{A}$, и в силу Т3 $\mathcal{A}$ – нормальный оператор. •

Подобные комплексные (вещественные) матрицы A и $B = Q^{-1}AQ$ называются ***унитарно*** (***ортогонально) подобными***, если матрица преобразования подобия Q унитарна (ортогональна): $QQ^H = Q^HQ = I$ ($QQ^T = Q^TQ = I$). Соотношение подобия для унитарно подобных матриц A и B: $B = Q^HAQ$, для ортогонально подобных : $B = Q^TAQ$.

Т5. *Квадратная комплексная матрица нормальна ⇔ она унитарно подобна диагональной матрице.*

Док–во. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – заданная матрица. Рассмотрим ∀ унитарное пр–во V размерности n. Зафиксируем в V произвольный ОНБ f. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ – ЛО, матрица которого в базисе f совпадает с матрицей A : $A = A_f$ (по Т(4*) такой оператор ∃). В силу Т3 ∃ ОНБ e, в котором матрица A_e имеет диагональную форму. При переходе от базиса e к базису $f = eQ$ матрица оператора изменяется по закону $A_f = Q^{-1}A_eQ$. Это равносильно их подобию.•

***:** *В паре биортогональных базисов e и f унитарного (евклидова) пр–ва V матрицы операторов* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{A}^*$ *связаны соотношением* $(\mathcal{A}^*)_f = (A_e)^H$

**: *Для ∀ оператора, действующего в унитарном пр–ве, ∃ ОНБ, в ко–тором он имеет треугольную матрицу.*

3*: *Если подпространство L инвариантно относительно оператора* $\mathcal{A}$*, то его ортогональное дополнение* $L^{\perp}$ *инвариантно относительно сопряженного оператора* $\mathcal{A}^*$.

4*****: *Пусть* $\dim V = n$, $\dim W = m$. *Тогда ∃ взаимно однозначное соответствие между ЛО из* $\mathcal{L}(V, W)$ *и матрицами из* $P^{m\times n}$

34. Блочно–диагональная форма вещественной нормальной матрицы.

Пусть V – унитарное или евклидово пр–во. ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ называется ***нормальным***, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется ***нормальной,*** если
$AA^H = A^H A$.

Т1. *Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

Т2 (критерий нормальности). *Оператор, действующий в унитарном пр–ве, нормален* ⇔ ∃ ОНБ *из собственных векторов этого оператора.*

Пусть e – ОНБ из собственных векторов нормального оператора $\mathcal{A}$, тогда

$$A_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \cdots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (A_e)^H = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \overline{\lambda_2} & \\ & \cdots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Пусть A – вещественная нормальная матрица. В силу нормальности, все жордановы клетки имеют порядок 1. Предположим , что $\lambda = a + \boldsymbol{i}b$ – собственное значение с ненулевой мнимой частью b, и пусть $A(x + \boldsymbol{i}y) = (a + \boldsymbol{i}b)(x + \boldsymbol{i}y) =$
$=(ax - by) + \boldsymbol{i}(bx + ay)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ =>

$$A[x, y] = [x, y]\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad (\mathbf{1})$$

Сопряженное число $\overline{\lambda} = a - \boldsymbol{i}b$ тоже будет собственным значением, отвечающим собственному вектору $x - \boldsymbol{i}y$. Для нормальной матрицы собственные векторы для различных собственных значений ортогональны =>

$(x + \boldsymbol{i}y, x - \boldsymbol{i}y) = (x, x) - (y, y) + 2\boldsymbol{i}(x, y)$ =>
$(x, y) = 0$, $|x| = |y|$
=> равенство (1) сохранится при замене на нормированные и ортогональные векторы x / s и y / s, $s = |x| = |y|$. Т.о. имеет место

Т. *Для ∀ вещественной нормальной матрицы ∃ вещественный ОНБ, в котором она является прямой суммой вещественных блоков порядка 1 и вещественных блоков порядка 2 вида* $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

35. Эрмитовы операторы и эрмитовы матрицы.
Эрмитово разложение ЛО.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение $\mathcal{A}^*: W \to V$ называется ***сопряженным оператором*** к $\mathcal{A}$, если
$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$, $\forall x \in V, y \in W$.

ЛО $\mathcal{A}$, действующий в унитарном (евклидовом) пр–ве, называется ***самосопряженным***, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Самосопряженный оператор в унитарном пр–ве называют ***эрмитовым***. Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется ***самосопряженной***, если $A = A^H$. Комплексную самосопряженную матрицу называют ***эрмитовой***.

Из определения =>

1°. Эрмитов оператор нормален ($\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$)
2°. Оператор эрмитов ⇔ в ∀ ОНБ он имеет эмитову матрицу.
3°. Определитель эрмитова оператора вещественен.
4°. Если подпространство L инвариантно относительно самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, то $L^\perp$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Это следует из Т(*Если подпространство L инвариантно отн–но оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно отн–но сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$*).
5°. Эрмитов оператор на ∀ инвариантном подпространстве индуцирует эрмитов оператор.

Т1 (спектральная характеристика самосопряже–нного оператора). *Нормальный оператор в унитарном пр–ве эрмитов ⇔ все корни его характеристического многочлена вещественны.*

Док–во. Необх–сть. В унитарном пр–ве утверждение означает, что все собственные значения эрмитова оператора вещественны, и вытекает из $\mathcal{A}x = \lambda x$ и
$\mathcal{A}x = \overline{\lambda}x$ с учетом Т (*Собственный вектор нормаль–ного оператора, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению* $\overline{\lambda}$).

Дост–сть. Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный и все корни его характеристического многочлена вещественны =>
в унитарном пр–ве ∃ ОНБ $e_1,..., e_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.
Если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ – ∀ вектор пр–ва, то $\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$ и $\mathcal{A}^* x = \sum_{i=1}^n x_i \overline{\lambda_i} e_i =$
$= \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$ т.к. $\lambda_i \in \mathbb{R}$ => $\mathcal{A}x = \mathcal{A}^*x$, $\forall x \in V$ =>
$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. •

Подобные комплексные матрицы A и $B = Q^{-1}AQ$ называются ***унитарно подобными***, если матрица преобразования подобия Q унитарна:. $Q Q^H = Q^H Q = I$. Соотношение подобия: $B = Q^H A Q$.

Из Т1 => *оператор, действующий в унитарном пр–ве, эрмитов ⇔ ∃ ОНБ, в котором его матрица имеет вещественную диагональную форму,* или, в матричной формулировке: *квадратная комплексная матрица является эмитовой ⇔ она унитарно подобна вещественной диагональной матрице.*

ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ в унитарном пр–ве V называется ***косоэрмитовым***, если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. Квадратная комплексная матрица – ***косоэрмитова***, если $A^H = -A$.

Из определения => оператор $\mathcal{A}$ косоэрмитов ⇔ его матрица в ∀ ОНБ пр–ва косоэрмитова .

Т2. *ЛО $\mathcal{A}$ в унитарном пр–ве эрмитов ⇔ оператор $\boldsymbol{i}\mathcal{A}$ косоэрмитов.*

Док–во. По св–ву сопряжения $(i\mathcal{A})^* = -i\mathcal{A}^*$ =>
$(i\mathcal{A})^* = -i\mathcal{A}^*$ ⇔ $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. •

Т3 (*эрмитово разложение ЛО*). *ЛО $\mathcal{A}$ в унитарном пр–ве можно представить, и притом единственным образом, в виде суммы эрмитова оператора $\mathcal{B}$ и косоэрмитова оператора $\mathcal{C}$:* $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$ **(1)**

Док–во. Положим $\mathcal{B} = ½(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)$, $\mathcal{C} = ½(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$ **(2)**
=> $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$, $\mathcal{C}^* = -\mathcal{C}$ и $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$. Единственность такой пары операторов следует из того, что для ∀ другой пары операторов $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{C}_1$ таких, что $\mathcal{B}_1^* = \mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1^* = \mathcal{C}_1$ и $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 + \mathcal{C}_1$ имеем $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}_1 - \mathcal{C}_1$ или
$½(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*) = \mathcal{B}_1$, $½(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*) = \mathcal{C}_1$ => в силу (2)
$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ •

Т4. *ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$ в унитарном пр–ве нормален ⇔ операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в эрмитовом разложении* (1) *этого оператора перестановочны.*

Док–во. Если $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$, то $\mathcal{A}^* = \mathcal{B} - \mathcal{C}$ и
$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2 - \mathcal{B}\mathcal{C} + \mathcal{C}\mathcal{B} - \mathcal{C}^2$, $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{B}^2 - \mathcal{C}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{C} - \mathcal{C}^2$, т.е. $\mathcal{A}\mathcal{A}^* - \mathcal{A}^*\mathcal{A} = 2(\mathcal{C}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{C})$ =>
$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ ⇔ $\mathcal{C}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{C}$. •

36. Симметрические операторы и матрицы.

Пусть $A \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение A^*: $W \to V$ называется ***сопряженным оператором*** к *оператору* A, если $(Ax, y) = (x, A^*y)$, $\forall x \in V, y \in W$.

ЛО A, действующий в унитарном (евклидовом) пр–ве, называется ***самосопряженным***, если $A = A^*$.

Самосопряженный оператор в евклидовом пр–ве называют ***симметрическим***. Квадратная матрица A (комплексная или вещественная) называется ***самосопряженной***, если $A = A^H$. Вещественная само–сопряженная матрица – ***симметрическая*** ($A = A^T$).

Из определения =>

1°.Симметрический оператор нормален ($AA^* = A^*A$)

2°. Оператор является симметрическим ⇔ в ∀ ОНБ он имеет симметрическую матрицу.

3°. Определитель симметрического оператора веществен.

4°. Если подпространство L инвариантно отн–но симметрического оператора A, то $L^\perp$ также инвариантно относительно A. Это следует из Т(*Если подпространство L инвариантно относительно оператора A, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно отн–но сопряженного оператора A^**).

5°. Симметрический оператор на ∀ инвариантном подпространстве индуцирует симметрический оп–р.

Т1 (спектральная характеристика самосопря–женного оператора). *Нормальный оператор в евкли–довом пр–ве является симметрическим ⇔ все корни его характеристического многочлена вещественны.*

Док–во. Необх–сть. В унитарном пр–ве утверждение означает, что все собственные значения эрмитова оператора вещественны, и вытекает из $Ax = \lambda x$ и $Ax = \bar{\lambda}x$ с учетом Т (*Собственный вектор нормаль–ного оператора, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором сопряженного оператора, отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$*).

Докажем для евклидова пр–ва E. Пусть e – ОНБ E, тогда A_e – самосопряженная (вещественная) матрица. Рассмотрим ∀ унитарное пр–во U (dim U = dim E), и в нем ∀ ОНБ f. Тогда матрице A_e отвечает самосопря–женный оператор $B \in \mathcal{L}(U, U)$, для которого A_e явля–ется матрицей в базисе f: $A_e = B_f$ => характеристи–ческие многочлены A и B совпадают и по доказанно–му выше (применительно к B) все корни характери–стического многочлена оператора A вещественны.

Дост–сть. Пусть A – нормальный оператор и все корни его характеристического многочлена вещественны => в евклидовом пр–ве ∃ ОНБ $e_1,..., e_n$ из собственных векторов оператора A. Если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ – ∀ вектор пр–ва, то $\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$ и

$\mathcal{A}^*x = \sum_{i=1}^n x_i \overline{\lambda_i} e_i = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$ т.к. $\lambda_i \in \mathbb{R}$ =>

$Ax = A^*x$, $\forall x \in V$ => $A = A^*$. •

Подобные вещественные матрицы A и $B = Q^{-1}AQ$ ***ортогонально подобны***, если матрица преобразования подобия Q ортогональна: $Q Q^T = Q^T Q = I$. Соотношение подобия: $B = Q^T A Q$.

Из Т1 => *оператор, действующий в евклидовом пр–ве, является симметрическим ⇔ ∃ ОНБ, в котором его матрица имеет вещественную диагональную форму,* или : *квадратная вещественная матрица является симметрической ⇔ она унитарно подобна вещественной диагональной матрице.*

ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$ в евклидовом пр–ве V ***кососимметрический***, если $A^* = -A$. Квадратная веществен. матрица ***кососимметрическая***, если $A^T = -A$.

Из определения => оператор A кососимметричен ⇔ его матрица в ∀ ОНБ пр–ва кососимметрична.

Т2(*эрмитово разложение ЛО*). *ЛО A в евклидовом пр–ве можно представить, и притом единственным образом, в виде суммы симметрического оператора B и кососимметрического оператора C* : $A = B + C$ **(1)**

Док–во. Положим $B = ½ (A + A^*)$, $C = ½ (A - A^*)$ **(2)**

=> $B^* = B$, $C^* = -C$ и $A = B + C$. Единственность такой пары операторов следует из того, что для ∀ другой пары операторов B_1 и C_1 таких, что $B_1^* = B_1$, $C_1^* = C_1$ и $A = B_1 + C_1$ имеем $A^* = B_1 - C_1$ или

½ $(A + A^*) = B_1$, ½ $(A - A^*) = C_1$ т.е. в силу (2)

$B_1 = B$, $C_1 = C$ •

Т3. *ЛО $A \in \mathcal{L}(V, V)$ в евклидовом пр–ве нормален ⇔операторы B и C в эрмитовом разложении* (1) *этого оператора перестановочны.*

Док–во. Если $A = B + C$, *то* $A^* = B - C$ и

$AA^* = B^2 - BC + CB - C^2$, $A^*A = B^2 - CB + BC - C^2$, т.е. $AA^* - A^*A = 2(CB - BC)$ =>

$AA^* = A^*A \Leftrightarrow CB = BC$.

37. Унитарные операторы и унитарные матрицы.

ЛО U, действующий в унитарном (евклидовом) пр–ве, – ***унитарный*** (***ортогональный***), если $U^*U = UU^* = I$.

Из определения =>

1°. Оператор U унитарен (ортогонален) ⇔ в ∀ ОНБ он имеет унитарную (ортогональную) матрицу:

$U U^H = U^H U = I$ ($U U^T = U^T U = I$)

2°. Для унитарного (ортогонального) U : | det U| = 1

3°. Унитарный (ортогональный) оператор нормален, т.к. $U^*U = UU^*$

Т1 (критерии унитарности). *В унитарном (евклидо–вом) пр–ве V следующие утверждения равносильны:*

1) *оператор U унитарен (ортогонален);*

2) $U^*U = I$

3) $UU^* = I$

4) *оператор U сохраняет скалярное произведение* : $(Ux, Uy) = (x, y)$ $\forall x, y \in V$

5) *оператор U сохраняет длину* : $|Ux| = |x|$, $\forall x \in V$

6) *оператор U переводит ∀ ОНБ V в ОНБ;*

7) *оператор U переводит хотя бы 1 ОНБ V в ОНБ.*

Док–во. 1 <=> 2 <=> 3. Из $U^*U = I$ или $UU^* = I$ => невырожденность U и существование U^{-1}. Умножение этих равенств на U^{-1} (справа или слева) приводит к $U^* = U^{-1}$ => 2 => 1, 3 => 1. Переход 1 => 2, 1 => 3 из определения.

1 => 4. $U^*U = I$ => $(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y)$ $\forall x, y \in V$

4 => 1. $(x, U^*Uy) = (Ux, Uy) = (x, y)$, $\forall x, y \in V$ => $U^*U = I$ на основании Т (*Если A, B – ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и $(Ax, y) = (Bx, y)$, $\forall x \in V, y \in W$, то $A = B$*).

4 => 5. $|Ux| = \sqrt{(\mathcal{U}x, \mathcal{U}x)} = \sqrt{(x, x)} = |x|$ $\forall x \in V$

5 => 4. Это следует из соотношений:

$(x, y) = (|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2)/2$ в евклидовом пр–ве и

$(x, y) = (|x + y|^2 - |x - y|^2 + i\,|x + i\,y|^2 - i\,|x - i\,y|^2)/4$ в унитарном пр–ве.

4 => 6. Очевидно, т.к. $(Ue_i, Ue_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$

6 => 4. Если $e_1, ..., e_n$ – ОНБ V и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, то $\mathcal{U}x = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{U}e_i$, $\mathcal{U}y = \sum_{i=1}^n y_i \mathcal{U}e_i$ и т.к. $Ue_1, ..., Ue_n$ – ОНБ, то, согласно (**),

$(Ux, Uy) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i = (x, y)$ $\forall x, y \in V$

6 => 7. Очевидно.

7 => 6. Этот переход доказан в п. 6 => 4. •

C. Унитарный (ортогональный) оператор на ∀ инвариантном подпространстве индуцирует унитарный (ортогональный) оператор, т.к. сохраняет скалярное произведение ∀ пары векторов этого подпр–ва.

Т2 (спектральная характеристика унитарного оператора). *Нормальный оператор в унитарном пр–ве унитарен ⇔ все его собственные значения по модулю равны* 1.

Док–во. Необх–сть справедлива в унитарном и евклидовом пр–ве и означает, что все собственные значения унитарного (и ортогонального) оператора U по модулю равны 1. Докажем это. Пусть x – собствен–ный вектор оператора U и λ – отвечающее ему соб–ственное значение => $(Ux, Ux) = (\lambda x, \lambda y) = |\lambda|^2 (x, x)$ Но $(Ux, Ux) = (x, U^*Ux) = (x, x)$ => $|\lambda| = 1$.

Дост–сть. Если U – нормальный оператор, то по критерию нормальности (*Оператор, действующий в унитарном пр–ве, нормален ⇔ ∃ ОНБ из собственных векторов этого оператора*) в пр–ве V ∃ ОНБ $e_1, ..., e_n$ из собственных векторов оператора U => для

$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$: $\mathcal{U}x = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i$, $|\lambda_i| = 1$, $i = \overline{1,n}$. В силу ортонормированности базиса e согласно (**) => $(x, x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ и $(Ux, Ux) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |x_i|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ => $|Ux| = |x|$, $\forall x \in V$, и U – унитарный оператор (из Т1: 5 =>1). •

Т3. *Если подпространство L инвариантно отн–но унитарного (ортогонального) оператора U, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ также инвариантно относительно U.*

Док–во. Пусть $y \in L^\perp$. Покажем, что $Uy \in L^\perp$, т.е. $(x, Uy) = 0$, $\forall x \in L$. Оператор U индуцирует на подпространстве L унитарный (ортогональный) оператор $U|L$=> оператор $U|L$ обратим и его образ совпадает со всем подпространством L, т.е. im $U|L = L$ (Т*) => для $\forall x \in L$ ∃ $x_1 \in L$: $x = Ux_1$ => $(x, Uy) = (Ux_1, Uy) = (x_1, y) = 0$, т.к. $x_1 \in L$, $y \in L^\perp$. •

Из того что унитарный оператор нормален и все его собственные значения по модулю = 1 => в *пр–ве V* ∃ ОНБ *e, в котором матрица унитарного оператора U имеет диагональную форму*

$$U_e = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \ldots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{где } |\lambda_i| = 1,\ i = \overline{1,n}$$

или: *квадратная комплексная матрица унитарна ⇔ когда она унитарно подобна диагональной матрице, у которой все диагональные элементы по модулю* = 1.

***:** *В конечномерном пр–ве V следующие утверждения равносильны: для $A \in \mathcal{L}(V, V)$*

1) $AA^{-1} = I$	5) det $A \neq 0$
2) $A^{-1}A = I$	6) *A обратим;*
3) *A не вырожден*	7) *A биективен.*
4) im $A = V$	

: *В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$ ⇔ e* – ОНБ

38. Блочно –диагональная форма ортогонал. матрицы.

ЛО Q, действующий в евклидовом пр–ве, называется ***ортогональным***, если $Q^*Q = QQ^* = I$. Из определения:

1°. Оператор Q ортогонален ⇔ в ∀ ОНБ он имеет ортогональную матрицу: $QQ^T = Q^TQ = I$

2°. Для ортогонального оператора Q $|\det Q| = 1$ **(1)**

3°. Ортогональный оператор нормален, т.к. $Q^*Q = QQ^*$

Пусть Q – ортогональный оператор, действующий в евклидовом пр–ве E. По Т (*Нормальный оператор в унитарном пр–ве унитарен ⇔ все его собственные значения по модулю равны* 1) и равенству (1) для его собственных значений λ и определителя (т.к. $\lambda \in \mathbb{R}$,
$\det Q \in \mathbb{R}$) имеем: $\lambda = \pm 1$, $\det Q = \pm 1$ **(2)**

В ∀ ОНБ e оператор Q имеет ортогональную матрицу Q_e => $Q_e^{-1} = Q_e^T$ **(3)**

1. В 1–мерном пр–ве матрица ортогонального оператора Q имеет вид: $Q_e = [\pm 1]$
(4) => $Q_e = I$ либо $Q_e = -I$.

2. В 2–мерном пространстве матрица ортогонального оператора Q имеет вид: $Q_e = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$,

причем в силу (3) $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}$, и, с учетом (2) и $Q^{-1} = \frac{1}{|Q|}\hat{Q}$, где $\hat{Q}$ – присоединенная матрица имеем $\pm\begin{bmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}$ **(5)**

а) Если $\det Q = 1$, то (5) означает $\begin{bmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}$ => $Q_e = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

Положив $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = -\sin\varphi$, получим $Q_e = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$ **(6)**

б)Если $\det Q = -1$, то (5) означает $\begin{bmatrix}-\delta & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{bmatrix}$ => $Q_e = \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; при этом $f(\lambda) = \det(Q_e - \lambda I) = =\lambda^2 - 1$ => оператор Q в 2–мерном пространстве имеет 2 различных собственных значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, и для него ∃ ОНБ f, в котором его матрица имеет вид

$Q_f = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ **(7)**

Т1. *Для ∀ ортогонального оператора Q в евклидовом пр–ве ∃ ОНБ e, в котором его матрица имеет квазидиагональную форму с клетками вида* (4) *и* (6) *на главной диагонали.*

Док–во. Индукция по размерности n пр–ва V. Для $n = 1, 2$ Т1 вытекает из (4), (6), (7). Пусть $n \ge 3$ и Т1 верна для ортогональных операторов в пр–вах $\dim = k < (n-1)$. Докажем Т1 для $\dim = n$. По Т(У *всякого ЛО в вещественном пр–ве ∃ 1–мерное или 2–мерное инвариантное подпространство*) для оператора Q ∃ 1–мерное либо 2–мерное инвариантное подпространство L. Если $\dim L = 1$, то $Q|L$ – ортогональный оператор (*ортогональный оператор на ∀ инвариантном подпространстве индуцирует ортогональный оператор,* т.к. сохраняет скалярное произведение) в 1–мерном пр–ве и в ОНБ e_1 пр–ва L его матрица имеет вид (4). Если же $\dim L = 2$, то $Q|L$ – ортогональный оператор в 2–мерном пр–ве и в ОНБ e_1, e_2 пр–ва L его матрица имеет вид (6) или (7). По Т(*Если подпространство L инвариантно отн–но ортогонального оператора Q, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ также инвариантно относительно Q*) ортогональное допол–нение $L^\perp$ инвариантно отн–но оператора Q. По индуктив–ному предположению в пр–ве $L^\perp$ ∃ ОНБ $e_2, \ldots, e_n$ (или $e_3, \ldots, e_n$), в котором матрица оператора $Q|L^\perp$ имеет требуемый вид. Тогда в базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица оператора Q также будет иметь требуемый вид. •

После перестановки векторов построенного базиса матрица ортогонального оператора Q будет иметь вид

$$U_e = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & O\\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & \\ & & & & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k\\ O & & & & & & & & \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{bmatrix} \quad \textbf{(8)}$$

Матрица (8) – ***каноническая формай*** *матрицы ортогонального оператора.*

Простое вращение – оператор в евклидовом пр–ве, имеющий в некотором ОНБ матрицу: а

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & O\\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & \\ & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ O & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(9)}$$

Простое отражение – оператор в евклидовом пр–ве, который в некотором ОНБ

имеет матрицу вида $\begin{bmatrix} 1 & & & & & O\\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ O & & & & & & 1 \end{bmatrix}$ **(10)**

Из определения => простое вращение и простое отражение – ортогональные операторы, т.к. их матрицы (9) и (10) в ОНБ ортогональны. Простое вращение – это поворот в некоторой 2–мерной плоскости, оставляет неизменным
$(n-2)$–мерное подпространство, ортогональное этой плоскости. Простое отражение меняет направление всех векторов некоторого 1-мерного подпространства и не изменяет его $(n-1)$–мерное ортогональное дополнение.

Т2. *Всякий ортогональный оператор можно представить как произведение некоторого числа простых вращений и простых отражений.*

39. Знакоопределенные операторы и матрицы. Квадратный корень из оператора.

Т1. *Если в унитарном пр–ве V для ∀ x выполняется равенство* $(x, Bx) = 0$, *то* $B = O$.

Док–во. Для ∀ $y, z \in V$ имеем $(B(y + z), y + z) = 0$ и
$(B(iy + z), iy + z) = 0$, т.е. $(By, y) + (Bz, y) + (By, z) +$
$+ (Bz, z) = 0$, $(By, y) - i(Bz, y) + i(By, z) + (Bz, z) = 0$ или, с учетом условия теоремы, $(Bz, y) + (By, z) = 0$, $-i(Bz, y) + i(By, z) = 0$. Прибавим к 1–му равенству 2–е, умноженное на i : $(By, z) = 0$ ∀ $y, z \in V$ => $B = O$ (Т (*Если A, B – ЛО из $\mathcal{L}(V, W)$ и* $(Ax, y) = (Bx, y)$, $\forall x \in V$, $y \in W$, *то* $A = B$)). •

ЛО A, действующий в унитарном (евклидовом) пр–ве, называется ***самосопряженным***, если $A = A^*$. Самосопряженный оператор в унитарном пр–ве – ***эрмитов***

Т2. *ЛО A в унитарном пр–ве V эрмитов ⇔*
$(Ax, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$ **(1)**

Док–во. Необх–сть. Если A – эрмитов оператор, то
$(Ax, x) = (x, A^*x) = (x, Ax)$, $\forall x \in V$ =>
$(\mathcal{A}x, x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)}$ и $(Ax, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$.

Дост–сть. Пусть $(Ax, x) \in \mathbb{R}$ => $(Ax, x) = (x, Ax)$ и $(Ax, x) = (x, A^*x)$ => $(x, (A - A^*)x) = 0$ $\forall x \in V$ =>
по Т1 $A = A^*$. •

Самосопряженный оператор в унитарном (евкли–довом) пр–ве называется ***положительно определенным***, если $(Ax, x) > 0$ $\forall x \ne \theta$, *неотрицательно определенным (отрицательно определенным* или *неположительно определенным),* если $(Ax, x) \ge 0$
$\forall x \ne \theta$ (соответственно $(Ax, x) < 0$ или $(Ax, x) \le 0$):
$A > O$, $A \ge O$, $A < O$, $A \le O$.

Т3. *Самосопряженный оператор A в унитарном* (*и евклидовом*) *пр–ве положительно определен* ($A \ge O$, $A < O$, $A \le O$) ⇔ *все его собственные значения* $\lambda > 0$ ($\lambda \ge 0$, $\lambda < 0$, $\lambda \le 0$).

Док–во. (для $A > O$). *Необх–сть*. Если $A > O$, то
$(Ax, x) > 0$ $\forall x \ne \theta$ => это верно и для собственного вектора x => $(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) > 0$, где
$(x, x) > 0$ => $\lambda > 0$.

Дост–сть. Если A – самосопряженный, то ∃ ОНБ из собственных векторов $e_1, \ldots, e_n$ оператора A. При этом соответствующие собственные значения $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, n}$ =>для $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \ne \theta$ имеем

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 > 0 \quad •$$

С. *Если* $A > O$ (*или* $A < O$), *то A обратим,* так как
$\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Т4. *Оператор, обратный к положительно* (*отрицательно*) *определенному оператору, положительно* (*отрицательно*) *определен.*

Док–во. Если A – самосопряженный оп–р, то A^{-1} – тоже самосопряженный оп–р, т.к. согласно свойствам сопряжения $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$. Если $A > O$ ($A < O$), то все собственные значения оператора A^{-1} положительны (отрицательны), т.к. они обратны соб–ственным значениям A. Из Т3 => $A^{-1} > O$ ($A^{-1} < O$). •

Т5. *Для ∀ неотрицательно* (*положительно*) *опреде–ленного оператора A ∃ ! неотрицательно* (*положи–тельно*) *определенный оператор B такой, что* $B^2 = A$

Док–во. Существование. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ОНБ из собственных векторов оператора A и $Ae_i = \lambda_i e_i$,
$i = \overline{1, n}$. По условию $\lambda_i \ge 0$ ($\lambda_i > 0$), $i = \overline{1, n}$. Положим

$$Be_i = \sqrt{\lambda_i}\, e_i, \ i = \overline{1, n} \quad \textbf{(3)}$$

Из (3) => $B \ge O$ ($B > O$), т.к. B – нормальный (ибо ∃ ОНБ $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов B), при этом он самосопряжен (ибо его собственные значения $\sqrt{\lambda_i} \in \mathbb{R}$) и, кроме того, $\sqrt{\lambda_i} \ge 0$ ($\sqrt{\lambda_i} > 0$). Оператор B – искомый, т.к. в силу (3) $B^2 e_i = \lambda_i e_i = Ae_i$, $i = \overline{1, n}$.

Единственность. Пусть ∃ другой оператор $C \ge O$
($C > O$): $C^2 = A$. Тогда ∃ ОНБ $f_1, \ldots, f_n$ из собственных векторов оператора C. Если $Cf_i = \mu_i f_i$, $i = \overline{1, n}$, то
$Af_i = C^2 f_i = \mu_i^2 f_i$, $i = \overline{1, n}$ => μ_i^2 являются собственны–ми значениями A => совпадают с числами λ_i. Покажем, что $Ce_i = \sqrt{\lambda_i}\, e_i$, $i = \overline{1, n}$ **(4)**
этим в силу (3) будет доказано, что $C = B$. Разложим вектор e_i по базису f : $e_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$ **(5)**

В этом равенстве участвуют собственные векторы
$e_i, f_1, \ldots, f_n$ оператора A, отвечающие собственным значениям $\lambda_i, \mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$. Из линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям => в разложении (5) отлич–ными от 0 будут коэффициенты α_k лишь при тех f_k, которые отвечают собственному значению $\mu_k^2 = \lambda_i$ =>

$$Ce_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k C f_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \sqrt{\lambda_i} f_k = \sqrt{\lambda_i} \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k = \sqrt{\lambda_i} e_i, \ \text{т.е. (4)}$$

Оператор B называется ***квадратным корнем из оператора*** A.

40.Сингулярные числа и сингулярные векторы. Полярное разложение оператора.

T1. *$\forall$ оператор $\mathcal{A}$ в унитарном (евклидовом) пр–ве можно представить в виде произведения неотрица–тельного оператора $\mathcal{B}$ и унитарного оператора $\mathcal{U}$:*

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U} \qquad \textbf{(1)}$$

При этом оператор $\mathcal{B}$ определен однозначно, а если $\mathcal{A}$ обратим, то и оператор $\mathcal{U}$ определен однозначно.

Док–во. 1. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

а) $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ – самосопряженный, т.к. $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

б) $\mathcal{A}^*\mathcal{A} > \mathcal{O}$, т.к. $(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) > 0$, $\forall x \neq \theta$.

в) $\exists$ ОНБ пр–ва из собственных векторов $e_1, \dots, e_n$ оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$. При этом можно считать, что векторы $e_1, \dots, e_r$ отвечают ненулевым собственным значениям $\rho_1^2, \dots, \rho_r^2$, а остальные – нулевым, так что $\rho_k > 0$ при $k \le r$ и $\rho_k = 0$ при $k > r$. **(2)**

$$r = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}^*\mathcal{A} \quad \textbf{(3)}$$

2. $\mathrm{im}\, \mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n)$. Для векторов $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$ $(\mathcal{A}e_i, \mathcal{A}e_j) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}e_i, e_j) = (\rho_i^2 e_i, e_j) = \begin{cases}\rho_i^2, & i = j\\ 0, & i \neq j\end{cases}$

=> $\mathcal{A}e_{r+1} = \dots \mathcal{A}e_n = \theta$ (в силу (3)), а $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_r$ – ненулевые попарно ортогональные векторы, причем

$|\mathcal{A}e_k| = \rho_k$, $k = \overline{1,r}$ => $g_k = \frac{1}{\rho_k}\mathcal{A}e_k$, $k = \overline{1,r}$ **(4)**

образуют ОНБ $\mathrm{im}\, \mathcal{A}$ => получено $r = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}$ **(5)**

(т.к. $\dim \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k) = \mathrm{rg}(a_1, \dots, a_k)$)

Дополним $g_1, \dots, g_r$ до ОНБ $g_1, \dots, g_r, g_{r+1}, \dots, g_n$ всего пр–ва => из (4) и (2):

$\mathcal{A}e_k = \rho_k g_k$, $k = \overline{1,n}$ **(6)**

3. Построим операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{U}$ из (1). Положим

$$\mathcal{U}e_k = g_k, \quad \mathcal{B}g_k = \rho_k g_k, \ k = \overline{1,n} \quad \textbf{(7)}$$

Тогда $\mathcal{U}$ – унитарный оператор, т.к. переводит ОНБ e в ОНБ g; $\mathcal{B} \ge \mathcal{O}$ как нормальный оператор (ибо ОНБ g состоит из его собственных векторов), собственные значения которого $\rho_k \ge 0$, $k = \overline{1,n}$.

При этом $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$, т.к., согласно (6) и (7),

$(\mathcal{B}\mathcal{U})e_k = \mathcal{B}(\mathcal{U})e_k = \mathcal{B}g_k = \rho_k g_k = \mathcal{A}e_k$, $k = \overline{1,n}$

4. Докажем единственность. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$ – разложение (1) для $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$ => $\mathcal{B}$ – квадратный корень из $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, который $\exists$ и определен однозначно по Т (*Для $\forall$ неотрицательно (положительно) определенного оператора $\mathcal{A}$ $\exists$! неотрицательно (положительно) определенный оператор $\mathcal{B}$: $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$*). Если $\mathcal{A}$ обратим, то из (3) и (5) => обратим $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, при этом $\rho_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, => согласно (7) обратим $\mathcal{B}$. В силу (1) отсюда => $\mathcal{U} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$. •

Попутно доказаны следующие факты:

а) $\mathrm{rg}\, \mathcal{A} = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}\mathcal{A}^*$ (из (3), (5) и $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$)

б) оператор $\mathcal{U}$ переводит ОНБ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ в ОНБ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ (из (7));

в) операторы $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ имеют одинаковые собственные значения (из $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$).

Арифметические значения квадратных корней из собственных значений оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ называются ***сингулярными числами*** оператора $\mathcal{A}$.

Разложение (2) называется ***полярным разложением оператора*** $\mathcal{A}$.

З. Для $\forall$ $\mathcal{A}$ имеет место разложение вида $\mathcal{A} = \mathcal{V}\mathcal{C}$, где $\mathcal{V}$ – унитарный оператор, $\mathcal{C} \ge \mathcal{O}$. Его можно получить из полярного разложения сопряженного оператора

$\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{U}$ переходом к оператору $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} = \mathcal{U}^*\mathcal{B}$, где $\mathcal{U}^*$ – унитарный оператор.

T2. *Оператор $\mathcal{A}$ нормален $\Leftrightarrow$ в любом его полярном разложении операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{U}$ перестановочны.*

Док–во. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$ – полярное разложение $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$, $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{U}^*\mathcal{B}^2\mathcal{U}$.

Дост–сть. Если $\mathcal{B}\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{B}$, то $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{U}^*\mathcal{B}^2\mathcal{U} =$

$= \mathcal{U}^*\mathcal{B}(\mathcal{B}\mathcal{U}) = \mathcal{U}^*\mathcal{B}(\mathcal{U}\mathcal{B}) = \mathcal{U}^*(\mathcal{B}\mathcal{U})\mathcal{B} =$

$= \mathcal{U}^*(\mathcal{U}\mathcal{B})\mathcal{B} = \mathcal{U}^*\mathcal{U}\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$

Необх–сть. Если $e_1, \dots, e_n$ – ОНБ из собственных векторов $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}^*\mathcal{A}e_k = \rho_k^2 e_k$, $k = \overline{1,n}$ **(8)**

С др. стороны, $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{U}^*\mathcal{B}^2\mathcal{U}$ => $\mathcal{U}^*\mathcal{B}^2\mathcal{U}e_k = \rho_k^2 e_k$, т.е. $\mathcal{B}^2\mathcal{U}e_k = \rho_k^2\, \mathcal{U}e_k$, $k = \overline{1,n}$ **(9)**

Т.к. $\mathcal{U}$ унитарен, то векторы $\mathcal{U}e_1, \dots, \mathcal{U}e_n$ образуют ОНБ => из (9) получим $\mathcal{B}\mathcal{U}e_k = \rho_k\, \mathcal{U}e_k$, $k = \overline{1,n}$ **(10)**

С другой стороны, $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^2$, и согласно (8)

$\mathcal{B}^2 e_k = \rho_k^2 e_k$ или $\mathcal{B}e_k = \rho_k e_k$, откуда умножением на $\mathcal{U}$ слева получим, что $\mathcal{U}\mathcal{B}e_k = \rho_k\, \mathcal{U}e_k$, $k = \overline{1,n}$ **(11)**

Из (10) и (11) => $\mathcal{B}\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{B}$.

41. Ортогональные дополнения ядра и образа ЛО. Теорема и альтернатива Фредгольма.

Пусть L – линейное подпространство евклидова (унитарного) пр–ва $E(U)$. Вектор x называется ***ортогональным к подпространству*** L ($x \perp L$), если он ортогонален $\forall y \in L$. $x \perp \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k) \Leftrightarrow x \perp a_i$, $i = \overline{1,k}$.

Совокупность всех векторов $x \in E(U)$, ортогональных подпространству L, называется ***ортогональным дополнением*** $L^\perp$ к L. ***Образ ЛО***

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ – $\mathrm{im}\, \mathcal{A} = \{y \in W \mid \exists x \in V : \mathcal{A}x = y\}$,

ядро ЛО $\mathcal{A}$ – $\ker \mathcal{A} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \theta\}$

Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Отображение $\mathcal{A}^* : W \to V$ называется ***сопряженным оператором*** к *оператору* $\mathcal{A}$, если $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$, $\forall x \in V$, $y \in W$

T1. *Для $\forall$ оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V)$:*

$$\ker \mathcal{A} = \mathrm{im}^\perp \mathcal{A}^*, \ \ker \mathcal{A}^* = \mathrm{im}^\perp \mathcal{A} \qquad \textbf{(1)}$$

Док–во. Для $\forall$ векторов $x \in \ker \mathcal{A}$, $y \in \mathrm{im}\, \mathcal{A}^*$ имеем

$\mathcal{A}x = \theta$, $y = \mathcal{A}^*y_1$ => $(x, y) = (x, \mathcal{A}^*y_1) = = (\mathcal{A}x, y_1) = 0$. => $\ker \mathcal{A} \subset \mathrm{im}^\perp \mathcal{A}^*$.

По теореме о ранге и дефекте

$\mathrm{rg}\, \mathcal{A} + \mathrm{def}\, \mathcal{A} = \dim V$ и т.к. $\mathrm{rg}\, \mathcal{A}^* = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}$, то $\dim \ker \mathcal{A} = = \dim V - \dim \mathrm{im}\, \mathcal{A} = \dim V - \dim \mathrm{im}\, \mathcal{A}^* = \dim \mathrm{im}^\perp \mathcal{A}^*$. Тогда $\ker \mathcal{A} = \mathrm{im}^\perp \mathcal{A}^*$ по Т о монотонности размер–ности (*Размерность линейного подпространства не превосходит размерности пр–ва. Подпространство той же размерности, что и все пр–во, совпадает с пр–вом*). 2–е доказывается ан–но. •

T1 (формулировка от Тырт–ва). *Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Тогда $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ представляются ортогональными суммами*: $\mathbb{C}^n = \ker A \oplus \mathrm{im}\, A^*$, $\mathbb{C}^m = \ker A^* \oplus \mathrm{im}\, A$. (Док–во то же самое)

T2. *Если подпространство L инвариантно отн–но оператора $\mathcal{A}$, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ инвариантно отн–но сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.*

Док–во. Если $x \in L$, $y \in L^\perp$ и т.к. L инвариантно отн–но $\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}x \in L$, то $(\mathcal{A}x, y) = 0$. С другой стороны, $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$ => $(x, \mathcal{A}^*y) = 0$, $\forall x \in L$ => $\mathcal{A}^*y \in L^\perp$. •

Пусть V, W – евклидовы (унитарные) пр–ва,

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, $u \in W$. Уравнение $\mathcal{A}z = u$ **(2)**

называется ***линейным операторным уравнением***, вектор u – *правой частью,* вектор z – *решением.* В матричной записи операторное уравнение превращается в систему линейных алгебраических уравнений => все свойства систем уравнений можно переносить на операторные уравнения и наоборот. ***Сопряженным*** *к* уравнению (2) называется однородное уравнение $\mathcal{A}^*w = \theta$ **(3)**

T3 (альтернатива Фредгольма). *Либо основное уравнение* (2) *имеет решение при $\forall$ правой части $u \in W$, либо сопряженное к нему уравнение имеет нетривиальное решение.*

Док–во. Пусть $r = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}$, $n = \dim W$. 2 случая.

1) $r = n \Leftrightarrow \mathrm{im}\, \mathcal{A} = W$, => уравнение (2) имеет решение при $\forall u \in W$. Тт.к. $\mathrm{rg}\, \mathcal{A}^* = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}$, то $\ker \mathcal{A}^* = \{\theta\}$ и уравнение (3) не имеет ненулевого решения.

2) $r < n \Leftrightarrow \mathrm{def}\, \mathcal{A}^* > 0$, $\exists w \in \ker \mathcal{A}^*$, $w \neq \theta$, т.е. $\exists$ ненулевое решение (3). При этом $\mathrm{im}\, \mathcal{A} \neq W$ и уравнение (2) имеет решение **не** для $\forall u \in W$. •

*З*1. Альтернатива Фредгольма для оператора $\mathcal{A}$, действующего в одном пр–ве V, означает, что либо основное уравнение имеет единственное решение при $\forall u \in V$, либо сопряженное к нему уравнение имеет нетривиальное решение.

T4 (теорема Фредгольма). *Операторное уравнение* (2) *имеет решение $\Leftrightarrow$ его правая часть ортогональна всем решениям сопряженного уравнения.*

Док–во. Уравнение (2) имеет решение $\Leftrightarrow u \in \mathrm{im}\, \mathcal{A}$ или, с учетом (2), когда $u \in \ker^\perp \mathcal{A}^* \Leftrightarrow$ вектор u ортогонален всем векторам $\ker^\perp \mathcal{A}^*$, т.е. решениям уравнения (3).

42. Билинейные и квадратичные формы.

Пусть V – линейное пр–во над полем Р. Отображение $\mathcal{A}: V \times V \to P$ – ***билинейная форма*** (БФ) в пр–ве V, если для $\forall x, y, z \in V$, $\alpha \in P$:

1) $\mathcal{A}(x+y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$; 3) $\mathcal{A}(x, y+z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$;

2) $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha\, \mathcal{A}(x, y)$; 4) $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$. **(1)**

БФ называется ***симметричной***, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, $\forall x, y \in V$.

Пр. 1) в n–мерном пр–ве V с базисом $e_1, \dots, e_n$ отображение $\mathcal{A}: V \times V \to P$:

$$\mathcal{A}(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (2)$$

$\forall\, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, a_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$ – фиксированные числа **Т1**. *Пусть V – линейное пр–во над полем P и $e_1, \dots, e_n$ – базис V. Для $\forall a_{ij} \in P$, $i, j = \overline{1,n}$, $\exists!$ БФ $\mathcal{A}(x, y)$ в пр–ве V: $\mathcal{A}(e_i, e_j) = a_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$.*

Док–во. $e_1, \dots, e_n$ – базис пр–ва V и a_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$, – заданные числа. (2) – БФ в V, причем $\mathcal{A}(e_i, e_j) = a_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$. $\forall$ БФ $\mathcal{B}(x, y)$ в V: $\mathcal{B}(e_i, e_j) = a_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$, совпадает с $\mathcal{A}(x, y)$, т.к. для $\forall\, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ из (1): $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i\, y_j\; \mathcal{B}(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$ => $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{A}(x, y)$, $\forall x, y \in V$. •

(2) – ***общий вид БФ*** *в базисе е*. $A_e = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$, где $a_{ij} = \mathcal{A}(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1,n}$, – ***матрица БФ*** $\mathcal{A}(x, y)$ *в базисе е*. Общий вид (2) в компактной форме: $\mathcal{A}(x, y) = x_e^T A_e\, y_e$, $\mathcal{A}(x, y) = y_e^T A_e^T x_e$. **(3)**

Т2. *$\forall$ матрица $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$ является матрицей единственной БФ в заданном базисе пр–ва.*

Док–во. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – заданный базис V. Матрица $A = (a_{ij}) \in P^{n \times n}$ является матрицей БФ (2). Из Т1 => единственность этой БФ. •

Т3. *Матрицы БФ $\mathcal{A}(x, y)$ в базисах e и $f = eQ$ связаны*: $A_f = Q^T A_e Q$.

Док–во. Согласно (3) $\mathcal{A}(x, y) = x_e^T A_e\, y_e = \{x_e = Qx_f, y_e = Qy_f\} = x_f^T Q^T A_e Q\, y_f$. И $\mathcal{A}(x, y) = x_f^T A_f\, y_f$ => т.к. x, y – $\forall$ => $A_f = Q^T A_e Q$ •

С. $\operatorname{rg} A_e = \operatorname{rg} A_f$.=> Все матрицы одной БФ имеют одинаковый ранг.

Т4. *БФ симметрична $\Leftrightarrow$ ее матрица в $\forall$ базисе симметрична.*

Док–во. *Необх–ть* проверяется непосредственно. *Дост–сть*: если $A_e^T = A_e$ то, согласно (3), $\mathcal{A}(x, y) = y_e^T A_e^T x_e = y_e^T A_e\, x_e = \mathcal{A}(y, x)$ •

Ранг БФ – ранг ее матрицы в $\forall$ базисе. БФ $\mathcal{A}(x, y)$ ***вырожденна***, если $\operatorname{rg} \mathcal{A}(x, y) < \dim V$, и ***невырожденна***, если $\operatorname{rg} \mathcal{A}(x, y) = \dim V$.

Т5. *$\mathcal{A}(x, y)$ вырождена $\Leftrightarrow$ $\exists$ вектор $x \neq \theta$: $\mathcal{A}(x, y) = 0$, $\forall y \in V$.* **(4)**

Док–во. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – базис V и $A_e = (a_{ij})$ – матрица БФ $\mathcal{A}(x, y)$ в этом базисе. Соотношение (4) $\Leftrightarrow$ системе $\mathcal{A}(x, e_j) = 0$, $i, j = \overline{1,n}$, $\Leftrightarrow$ (т.к $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$) системе $\sum_{i=1}^n x_i \mathcal{A}(e_i, e_j) = 0$, $i, j = \overline{1,n}$ т.е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

=> БФ $\mathcal{A}(x, y)$ вырождена $\Leftrightarrow$ однородная система (5) имеет нетривиальное решение, т.е. когда $\operatorname{rg} A_e < n$. •

Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ – симметричная БФ в V над полем P. ***Квадратичной формой*** (КФ) – отображение $\mathcal{A}: V \to P$, которое $\forall x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x, x)$. БФ $\mathcal{A}(x, y)$ – ***полярная БФ*** к КФ $\mathcal{A}(x)$.

Т6. *Полярная БФ для $\forall$ КФ определена однозначно.*

Вытекает из того, что если $\mathcal{A}(x, y)$ – полярная БФ для КФ $\mathcal{A}(x, x)$, то для $\forall x, y \in V$ $\mathcal{A}(x, y) = ½\,(\mathcal{A}(x+y, x+y) - \mathcal{A}(x, x) - \mathcal{A}(y, y))$. •

Матрица КФ $\mathcal{A}(x, x)$ *в базисе е* – матрица полярной БФ $\mathcal{A}(x, y)$ в e.
2 квадратные матрицы A и B ***конгруэнтны***, если $\exists$ невырожденная Q : $B = Q^T A\, Q$. 2 квадратные комплексные матрицы A и B ***эрмитово конгруэнтны***, если $\exists$ невырожденная Q : $B = Q^* A\, Q$. Свойства КФ:
1°. Матрица КФ симметрична. 2°. $\forall$ симметрическая матрица является матрицей единственной КФ в заданном базисе.
3°. Матрицы КФ в базисах e и $f = eQ$ связаны : $A_f = Q^T A_e Q$. **(6)**
Т.е. 2 матрицы КФ $\mathcal{A}(x, x)$ в различных базисах конгруэнтны.
4°. В базисе e КФ $\mathcal{A}(x, x)$ с матрицей $A_e = (a_{ij})$: $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\mathcal{A}(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\,, \qquad a_{ij} = a_{ji} \qquad (7)$$

или, в компактной форме $\mathcal{A}(x, x) = x_e^T A_e\, x_e$, $\quad A_e^T = A_e$ **(8)**

(7) или (8) – ***общий вид КФ*** $\mathcal{A}(x, x)$ *в базисе е*.

5°. ***Ранг КФ*** ранг ее матрицы в $\forall$ базисе. $\operatorname{rg} \mathcal{A}(x, x) = \operatorname{rg} \mathcal{A}(x, y)$. КФ $\mathcal{A}(x, x)$ ***вырожденная***, если $\operatorname{rg} \mathcal{A}(x, x) < \dim V$ и ***невырожденной***, если $\operatorname{rg} \mathcal{A}(x, x) = \dim V$. Базис $e = (e_1, \dots, e_n)$ –***канонический базис КФ*** $\mathcal{A}(x, x)$, если ее матрица в e диагональна: $A_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Канонический вид КФ (λ_i – ***канонические коэффициенты***)

$\mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2$, $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ **(9)**

Число ненулевых квадратов r = рангу $\mathcal{A}(x, x)$

Т7. *Для $\forall$ КФ $\exists$ канонический базис.*

Док–во. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ – базис V. КФ $\mathcal{A}(x, x)$ с $A_e = (a_{ij})$ имеет в этом базисе вид (7). Пусть $g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$. Переход к базису $f = eQ$ $\Leftrightarrow$ преобразованию координат : $x_e = Qx_f$, $|Q| \neq 0$. Пусть $A_e \neq O$, Δ_k – ее *угловые миноры k*–го порядка : $\Delta_k = M_{1,\dots,k}^{1,\dots,k}$, $k = \overline{1,n}$, и $\Delta_0 = 1$.

I. (***метод Лагранжа***) Если $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1, n-1}$, приведение к каноническому виду за из $n-1$ шагов.

1–й шаг : $\Delta_1 \neq 0$, т.е. $a_{11} \neq 0$. Соберем все члены КФ $g(x_1, \dots, x_n)$, содержа–щие x_1, и выделим полный квадрат: $\mathcal{A}(x, x) = g(x_1, \dots, x_n) =$

$a_{11}x_1^2 + 2\sum_{k=2}^n a_{1k}x_1x_k + \sum_{i,k=2}^n a_{ik}x_ix_k = a_{11}\left(x_1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k\right)^2 - a_{11}\left(\sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k\right)^2$

$+ \sum_{i,k=2}^n a_{ik}x_ix_k$ Перейдем к : $x_1' = x_1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_{1k}}{a_{11}}x_k$ и $x_j' = x_j$ при $j \neq 1$, выполнив при этом преобразование координат с матрицей

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

=> КФ $\mathcal{A}(x, x)$ в новых координатах : $\mathcal{A}(x, x) = a_{11}x_1'^2 + h(x_2', \dots, x_n')$, где $h(x_2', \dots, x_n')$ – КФ от $x_2', \dots, x_n'$ => $A_1 = Q^T{}_1 A_e Q_1$ в новом базисе :

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}' & \dots & a_{2n}' \\ & & \dots & \\ 0 & a_{n2}' & \dots & a_{nn}' \end{bmatrix}$$

$\forall$ строка (столбец) A_1, начиная со 2–й, получена из соответ–щей строки (столбца) A_e вычитанием из нее 1–й строки (столбца) A_e , умноженной на некоторое число => угловые миноры A_1 совпадают с $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ => $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_1 = a_{11}\, a'_{22}$ и $a'_{22} = \Delta_2 / \Delta_1 \neq 0$ **(10)**

2–й шаг : $\Delta_2 \neq 0$, т.е. $a_{22} \neq 0$, применяются действия 1–го шага к КФ $h(x_2', \dots, x_n')$: выделяется полный квадрат среди членов, содержащих x_2, выполняется невырожденное преобразование координат

$$x_2'' = x_2' + \sum_{k=3}^n \frac{a_{2k}'}{a_{22}'}x_k' \;\text{ и }\; x_j'' = x_j' \;\text{ при }\; j \neq 2$$

и КФ $\mathcal{A}(x, x)$: $\mathcal{A}(x, x) = a_{11}x_1''^2 + a_{22}'x_2''^2 + v(x_3'', \dots, x_n'')$, где $v(x_3'', \dots, x_n'')$ – КФ от переменных $x_3'', \dots, x_n''$, а ее матрица – к виду

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}'' & \dots & a_{3n}'' \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & a_{n3}'' & \dots & a_{nn}'' \end{bmatrix}$$

Угловые миноры A_2 совпадают с $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ => $a_{33}'' = \Delta_3 / \Delta_2 \neq 0$ **(11)**

Повторяя процесс, за $(n-1)$ шагов придем к базису, в котором матрица КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет форму: $A_{n-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где с учетом (10), (11) и $\Delta_0 = 1$: $\lambda_i = \Delta_i / \Delta_{i-1}$ $i = \overline{1,n}$ **(12)**

II. (Модификация метода Лагранжа) Пусть теперь среди $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$ встре-чаютсяся 0-е и после $(i-1)$–го шага матрица КФ $\mathcal{A}(x, x)$:

$$A_{i-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & & O \\ & \ddots & \\ & & a_{i-1,i-1} \\ O & & & C \end{bmatrix}, \text{ где } C = \begin{bmatrix} a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Пусть $C \neq O$ ($C = O$ => канонический базис уже построен).

1. Если $a_{ii} \neq 0$, то выполним i–й шаг метода Лагранжа.
2. Пусть $a_{ii} = 0$.

а) Если среди диагональных элементов C $\exists$ $a_{jj} \neq 0$, $j > i$, то перену–меруем: $x'_i = x_j$, $x'_j = x_i$ и $x'_k = x_k$ при $k \neq i, j$ => в A_{i-1} поменяются местами строки (столбцы) с номерами i и j => в позиции (i, i) окажется $a'_{ii} = a_{jj} \neq 0$ => выполним i–й шаг метода Лагранжа.

б) Пусть все диагональные элементы =0 => в ней $\exists$ $a_{kj} \neq 0$, $k, j \geq i$, $k \neq i$ => в КФ от $x_1, \dots, x_n$ нет квадратов x_i^2, ..., x_n^2, но есть член вида $2a_{kj}x_kx_j$. Перейдем к новым координатам: $x_k = x'_k + x'_j$, $x_j = x'_k - x'_j$ и $x'_s = x_s$ при $s \neq k, j$ => КФ будет иметь квадраты x'^2_k, x'^2_j => переход к "а". •

Т8. *Если в матрице КФ $\mathcal{A}(x, x)$ ранга r первые r угловых миноров отличны от 0: $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1,r}$, то $\exists$ базис e, в котором матрица КФ имеет диагональный вид $A_e = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$, где*

$$\lambda_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}, \; k = \overline{1,r} \qquad \textbf{\textit{(формулы Якоби)}} \quad \mathbf{(13)}$$

Док–во. Для КФ $\mathcal{A}(x, x)$ выполнимы 1–ые r шагов метода Лагранжа. После r–го шага матрица A_r КФ :

$$A_r = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \\ O & & & C \end{bmatrix}$$

где, согласно (12), $\lambda_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}$ $k = \overline{1,r}$, а C – некоторая матрица. Т.к. $\operatorname{rg} A_r = r$ и $\lambda_k \neq 0$, $k = \overline{1,r}$, то $\operatorname{rg} C = 0$ и $C = O$ => A_r имеет искомый вид. •

43. Закон инерции квадратичных форм.

Пусть V – линейное пр–во над полем Р. Отображение $\mathcal{A}: V \times V \to P$ называется ***билинейной формой*** в пр–ве V, если для $\forall\, x, y, z \in V,\ \alpha \in P$:

1) $\mathcal{A}(x + y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$;

2) $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha\, \mathcal{A}(x, y)$;

3) $\mathcal{A}(x, y + z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$; **(1)**

4) $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$.

БФ ***симметрична***, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, $\forall\, x, y \in V$.

Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ – симметричная БФ в пространстве V над полем P. ***Квадратичной формой*** называется отображение $\mathcal{A}: V \to P$, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x, x)$. БФ $\mathcal{A}(x, y)$ при этом называется ***полярной*** БФ к КФ $\mathcal{A}(x)$. Базис $e = (e_1, ..., e_n)$ называется ***каноническим базисом КФ*** $\mathcal{A}(x, x)$, если ее матрица в этом базисе диагональна: $A_e = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. В каноническом базисе КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет ***канонический*** вид

$\mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + ...+ \lambda_n x_n^2,\ \forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ **(2)**

числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – ее ***канонические коэффициенты***. Число ненулевых квадратов = рангу $\mathcal{A}(x, x)$. Число π положительных квадратов в (2) и число $\nu = r - \pi$ называются ***положительным*** и ***отрицательным индексами инерции*** КФ $\mathcal{A}(x, x)$, их разность $\sigma = \pi - \nu$ называется ***сигнатурой*** $\mathcal{A}(x, x)$.

Т1 (закон инерции). *Положительный и отрицательный индексы инерции вещественной КФ не зависят от выбора канонического базиса.*

Док–во. Пусть e и f – канонические базисы КФ $\mathcal{A}(x, x)$ ранга r и для $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$:

$\mathcal{A}(x, x) = a_1 x_1^2 + ...+ a_p x_p^2 - a_{p+1} x_{p+1}^2 - ... - a_r x_r^2$, **(3)**

$\mathcal{A}(x, x) = b_1 y_1^2 + ...+ b_q y_q^2 - b_{q+1} y_{q+1}^2 - ... - b_r y_r^2$,

где $a_i, b_i > 0$, $i = \overline{1, r}$. Докажем, что $p \le q$. Пусть $p > q$. Рассмотрим подпространства $L_1 = \mathcal{L}(e_1,..., e_p)$, $L_2 = \mathcal{L}(f_{q+1}, ..., f_n)$. Согласно (*),

$\dim L_1 \cap L_2 = p - (n - q) - \dim (L_1 + L_2)$.

Т.к. $\dim (L_1 + L_2) < n$, $p > q$, то $\dim L_1 \cap L_2 > 0$ =>

$\exists\, x_0 \in L_1 \cap L_2$, $x_0 \ne \theta$. Пусть

$x_0 = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_p e_p = \beta_{q+1} f_{q+1} + ... + \beta_n f_n$ => из (3)

$\mathcal{A}(x_0, x_0) = a_1 \alpha_1^2 + ...+ a_p \alpha_p^2 = - b_{q+1} \beta_{q+1}^2 - ... - b_r \beta_r^2$ **(4)**

Т.к. $x_0 \ne \theta$, то $a_1 \alpha_1^2 + ...+ a_p \alpha_p^2 > 0$,

$- b_{q+1} \beta_{q+1}^2 - ... - b_r \beta_r^2 < 0$. Это противоречит (4) =>

$p < q$. Ан–но показывается, что $q < p$ => $p = q$. •

Пусть $P(\Delta_0, ..., \Delta_k)$ и $V(\Delta_0, ..., \Delta_k)$ – число совпадений и перемен знаков в последовательности $\Delta_0, ..., \Delta_k$.

Т2 (сигнатурное правило Якоби). *Пусть* Δ_k *– угловой минор k–го порядка матрицы КФ* $\mathcal{A}(x, x)$ *ранга r и* $\Delta_k \ne 0$, $k = \overline{1, r}$. *Тогда* $\pi = P(\Delta_0, ..., \Delta_r)$, $\nu = V(\Delta_0, ..., \Delta_r)$.

Утверждение теоремы вытекает из формул Якоби (5) (**), т.к. $\lambda_i > 0$, если $\mathrm{sgn}\, \Delta_i = \mathrm{sgn}\, \Delta_{i-1}$, и $\lambda_i < 0$, если $\mathrm{sgn}\, \Delta_i \ne \mathrm{sgn}\, \Delta_{i-1}$ •

***:** *Для* $\forall$ *линейных подпространств* L_1 *и* L_2 *линейного пр–ва V*: $\dim (L_1+L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2$

**: *Если в матрице КФ* $\mathcal{A}(x, x)$ *ранга r 1–е r угловых миноров отличны от* 0: $\Delta_k \ne 0$, $k = \overline{1, r}$, *то* $\exists$ *базис e, в котором матрица КФ имеет диагональный вид*

$A_e = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_r, 0,..., 0)$, *где* $\lambda_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}$, $k = \overline{1, r}$ **(5)**

44. Привидение квадратичной формы к главным осям.

Пусть V – линейное пр–во над полем Р. Отображение $\mathcal{A}: V \times V \to P$ называется ***билинейной формой*** в пр–ве V, если для $\forall\, x, y, z \in V,\ \alpha \in P$:

1) $\mathcal{A}(x + y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$;

2) $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha\, \mathcal{A}(x, y)$;

3) $\mathcal{A}(x, y + z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$; **(1)**

4) $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$.

БФ ***симметричная***, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, $\forall\, x, y \in V$.

Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ – симметричная БФ в пр–ве V над полем P. ***Квадратичной формой*** называется отображение $\mathcal{A}: V \to P$, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x, x)$. БФ $\mathcal{A}(x, y)$ – ***полярная БФ*** к КФ $\mathcal{A}(x)$. Базис $e = (e_1, ..., e_n)$ – ***канонический базисом КФ*** $\mathcal{A}(x, x)$, если ее матрица в этом базисе диагональна: $A_e = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. В каноническом базисе КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет ***канонический*** вид

$\mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + ...+ \lambda_n x_n^2,\ \forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ **(2)**

числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – ее ***канонические коэффициенты***. Число ненулевых квадратов = рангу $\mathcal{A}(x, x)$.

Т1. *Для* $\forall$ *КФ* $\mathcal{A}(x, x)$ *в евклидовом пр–ве E* $\exists\,!$ *симметрический оператор* $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(E, E)$:

$$\mathcal{A}(x, x) = (\mathcal{H} x, x), \quad \forall\, x \in E. \quad \mathbf{(3)}$$

Док–во. *Существование*. Пусть $e = (e_1, ..., e_n)$ – ОНБ пр–ва E и A_e – матрица КФ $\mathcal{A}(x, x)$ в этом базисе. В силу симметричности матрицы A_e и ортонормир–ованности базиса e $\exists$ симметрический оператор $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(E, E)$, который в базисе e имеет матрицу A_e, так что $H_e = A_e$ => для $\forall\ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, координаты вектора $\mathcal{H} x$ находятся согласно (*): $(\mathcal{H} x)_e = H_e x_e = A_e x_e$ => в силу (**) $(\mathcal{H} x, x) = x_e^T A_e\, x_e$ => с учетом записи КФ в компактном виде ($\mathcal{A}(x, x) = x_e^T A_e\, x_e$) получаем (3).

Единственность. Если $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ – симметрические операторы удовлетворяют (3), то $(\mathcal{H}_1 x, x) = (\mathcal{H}_2 x, x)$, $\forall\, x \in E$ => $((\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2)\, x, x) = 0$, $\forall\, x \in E$. **(4)** => $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$

(Оператор $\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$ симметричен, для него $\exists$ ОНБ из собственных векторов, а все собственные значения в силу (4) = 0) •

Т2. *Для любой КФ в евклидовом пр–ве E существует ОНБ, в котором она имеет канонический вид.*

Док–во. Пусть $\mathcal{H}$ – симметрический оператор, для которого $\mathcal{A}(x, x) = (\mathcal{H} x, x)$, $\forall\, x \in E$. Если $e_1, ..., e_n$ – ОНБ из собственных векторов $\mathcal{H}$, то для $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ согласно (3) и (**):

$$\mathcal{A}(x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i\,, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

где $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – собственные значения оператора $\mathcal{H}$, отвечающие собственным векторам $e_1, ..., e_n$. •

Операция построения ОНБ, в котором КФ имеет канонический вид, называется ***приведением квадратичной формы к главным осям***. Из Т2 => $\forall$ *КФ приводится к главным осям.*

3. При док–ве Т2, попутно показано, что каноничес–кий базис КФ $\mathcal{A}(x, x)$ совпадает с ОНБ из собственных векторов соответствующего симметрического оператора $\mathcal{H}$, а канонические коэффициенты – с отвечающими им собственными значениями. Собственные значения оператора $\mathcal{H}$ – это корни уравнения $|A_e - \lambda I| = 0$, которые не зависят от $\mathcal{H}$ и инвариантно связаны только с самой КФ. Т.о., при приведении КФ к главным осям *канонические коэффициенты определены однозначно*. Это позволяет находить канонический вид КФ без вычисления канонического базиса.

----

*: *Если* $y = \mathcal{A}\, x$, *то* $y_f = A_{fe} x_e$

**: *В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, *заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу* $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ $\Leftrightarrow$ e – ОНБ

45. Одновременное привидение к каноническому виду пары квадратичных форм.

Пусть V – линейное пр–во над полем P. Отображение $\mathcal{A} : V \times V \to P$ называется ***билинейной формой*** в пр–ве V, если для $\forall\ x, y, z \in V,\ \alpha \in P$:

1) $\mathcal{A}(x + y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$;

2) $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha\ \mathcal{A}(x, y)$;

3) $\mathcal{A}(x, y + z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$; **(1)**

4) $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$.

БФ ***симметричная***, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x), \forall\ x, y \in V$.

Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ – симметричная БФ в пр–ве V над полем P. ***Квадратичной формой*** называется отображение

$\mathcal{A} : V \to P$, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x, x)$. БФ $\mathcal{A}(x, y)$ – ***полярная БФ*** к КФ $\mathcal{A}(x)$. Базис $e = (e_1, ..., e_n)$ – ***канонический базисом КФ*** $\mathcal{A}(x, x)$, если ее матрица в этом базисе диагональна: $A_e = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. В каноническом базисе КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет ***канонический*** вид

$\mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + ...+ \lambda_n x_n^2,\ \forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ **(2)**

числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – ее ***канонические коэффициенты***. Число ненулевых квадратов = рангу $\mathcal{A}(x, x)$. КФ

$\mathcal{A}(x, x)$ называется ***положительно*** (***отрицательно***) ***определенной***, если $\mathcal{A}(x, x) > 0$ ($\mathcal{A}(x, x) < 0$), $\forall\ x \neq \theta$.

Т1 (о паре КФ). *Для $\forall$ пары КФ $\mathcal{A}(x, x)$ и $\mathcal{B}(x, x)$ в вещественном пр–ве V, одна из которых положи–тельно определена, $\exists$ общий базис, в котором обе КФ имеют канонический вид.*

Док–во. Пусть $\mathcal{B}(x, x) > 0$ и $\mathcal{B}(x, y)$ – БФ, полярная к КФ $\mathcal{B}(x, x)$. В соответствии с Т(*) введем скалярное произведение $(x, y) = \mathcal{A}(x, y)\ \forall\ x, y \in V$. Тогда пр–во V – евклидово и в нем согласно Т (**) $\exists$ ОНБ $e_1, ..., e_n$, в котором КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет канонический вид

$$\mathcal{A}(x,x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

При этом в силу (***) для $\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\mathcal{B}(x,x) = (x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

***:** *Пусть V – вещественное линейное пр–во. Отобра–жение $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ есть скалярное произведение в пр–ве V $\Leftrightarrow$ оно является БФ, полярной к положи–тельно определенной КФ.*

**: *Для $\forall$ КФ в евклидовом пр–ве E существует ОНБ, в котором она имеет канонический вид.*

***: *В евклидовом (унитарном) пр–ве скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, заданных своими координатами в базисе e, вычисляется по правилу $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$* $\Leftrightarrow$ *e* – ОНБ

46. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Пусть V – линейное пр–во над полем P. Отображение $\mathcal{A} : V \times V \to P$ называется ***билинейной формой*** в пр–ве V, если для $\forall\ x, y, z \in V,\ \alpha \in P$:

1) $\mathcal{A}(x + y, z) = \mathcal{A}(x, z) + \mathcal{A}(y, z)$;

2) $\mathcal{A}(\alpha x, y) = \alpha\ \mathcal{A}(x, y)$;

3) $\mathcal{A}(x, y + z) = \mathcal{A}(x, y) + \mathcal{A}(x, z)$; **(1)**

4) $\mathcal{A}(x, \alpha y) = \alpha \mathcal{A}(x, y)$.

БФ ***симметричная***, если $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x), \forall\ x, y \in V$.

Пусть $\mathcal{A}(x, y)$ – симметричная БФ в пр–ве V над полем P. ***Квадратичной формой*** называется отображение

$\mathcal{A} : V \to P$, которое каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие число $\mathcal{A}(x, x)$.

БФ $\mathcal{A}(x, y)$ – ***полярная БФ*** к КФ $\mathcal{A}(x)$. Базис $e = (e_1, ..., e_n)$ – ***канонический базисом КФ*** $\mathcal{A}(x, x)$, если ее матрица в этом базисе диагональна: $A_e = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. В каноническом базисе КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет ***канонический*** вид

$\mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + ...+ \lambda_n x_n^2,\ \forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ **(2)**

числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – ее ***канонические коэффициенты***. Число ненулевых квадратов = рангу $\mathcal{A}(x, x)$. Число π положительных квадратов в (2) и число $\nu = r - \pi$ называются ***положительным*** **и** ***отрицательным индексами инерции*** КФ $\mathcal{A}(x, x)$, их разность $\sigma = \pi - \nu$ называется ***сигнатурой*** $\mathcal{A}(x, x)$. КФ $\mathcal{A}(x, x)$ ***положи–тельно*** (***отрицательно***) ***определенная***, если

$\mathcal{A}(x, x) > 0$ ($\mathcal{A}(x, x) < 0$), $\forall\ x \neq \theta$. Такие формы – ***знакоопределенные***. КФ, для которой $\exists\ x$ и y :

$\mathcal{A}(x, x) > 0$, $\mathcal{A}(y, y) < 0$, – ***знакопеременная***.

Пр. Положительно определенной КФ в вещественном пр–ве является скалярный квадрат в евклидовом пр–ве, т.е. отображение $\mathcal{A} : E \to \mathbb{R}$, опре-деленное равенством $\mathcal{A}(x) = (x, x), \forall x \in E$, т.к. скалярное произведение (x, y) является симметричной БФ (см. аксиомы 1–3 из (*)), а скалярный квадрат – положительно определенной КФ (см. аксиому 4).

Т1. *КФ $\mathcal{A}(x, x)$ положительно (отрицательно) определена $\Leftrightarrow$ ее поло-жительный (отрицательный) индекс инерции совпадает с* $\dim V$.

Док–во. Для $\mathcal{A}(x, x) > 0$. Пусть e – канонический базис КФ $\mathcal{A}(x, x)$ и $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – ее канонические коэф–ты. *Необх–сть*. Если $\mathcal{A}(x, x) > 0$, $\forall\ x \neq \theta$, то и

$\mathcal{A}(e_i, e_i) > 0$, $i = \overline{1,n}$. Но $\mathcal{A}(e_i, e_i) = \lambda_i$ => все канонические коэффициенты положительны и $\pi = n$.

Дост–сть. Если $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, то согласно (2)

$\mathcal{A}(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0, \forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \neq \theta$.

Для док–ва 2–го утверждения рассмотреть КФ

$-\mathcal{A}(x, x)$: $\mathcal{A}(x, x) < 0 \Leftrightarrow -\mathcal{A}(x, x) > 0 \Leftrightarrow \nu = \dim V$. •

С. *Определитель матрицы положительно определенной КФ положителен*, т.к. если e – канонический базис, то в $\forall$ базисе f : $| A_f | = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n \cdot | Q |^2 > 0$ (т.к. матрицы КФ в базисах e и $f = eQ$ связаны $A_f = Q^T A_e Q$

Т2 (критерий Сильвестра). *КФ $\mathcal{A}(x, x)$ положи–тельно (отрицательно) определена $\Leftrightarrow$ угловые миноры Δ_k, $k = \overline{1,n}$, ее матрицы в произвольном базисе положительны (чередуют знаки, начиная с отрицательного)*:

$$\Delta_k > 0,\ k = \overline{1,n}\ \ (\Delta_k \Delta_{k-1} < 0,\ k = \overline{1,n})$$

Док–во. 1) *Необх–сть*. Пусть $\mathcal{A}(x, x)$ – положительно определенная КФ, A_e – ее матрица в $\forall$ базисе

$e = (e_1, ..., e_n)$. Рассмотрим подпространства

$L_k = \mathcal{L}(e_1,..., e_k)$, $k = \overline{1,n}$, и КФ $\mathcal{A}(x, x)$ на L_k.

$\mathcal{A}(x, x) > 0$, $\forall x \in L_k$, $x \neq \theta$ => ее матрица A_k в базисе $e_1,..., e_k$ пр–ва L_k имеет положительный определитель

$| A_k |$ (следствие). Но $| A_k | = \Delta_k$, $k = \overline{1,n}$, => $\Delta_k > 0$, $k = \overline{1,n}$. *Дост–сть* вытекает из Т(**) и Т1.

2) Для док–ва 2–го утверждения рассмотрим КФ

$-\mathcal{A}(x, x)$ с угловыми минорами δ_k. Отрицательная определенность $\mathcal{A}(x, x) \Leftrightarrow$ положительности формы $-\mathcal{A}(x, x)$, т.е. условию $\delta_k > 0$, $k = \overline{1,n}$, или $(-1)^k \Delta_k > 0$, $k = \overline{1,n}$. Т.к. $\Delta_0 = 1 > 0$, то: $\Delta_k \Delta_{k-1} < 0$, $k = \overline{1,n}$. •

Из примера => скалярное произведение в евклидовом пр–ве является БФ, полярной к положительно определенной КФ, такими БФ исчерпываются все скалярные произведения в вещественном пр–ве.

Т3. *Пусть V – вещественное линейное пр–во. Отображение $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ есть скалярное произведение в пр–ве V $\Leftrightarrow$ оно является БФ, полярной к положительно определенной КФ.*

Док–во. Необх–сть в примере. *Дост–сть*. Пусть

$\mathcal{A}(x, x)$ – БФ, полярная к положительно определенной КФ. Тогда отображение $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{R}$, определенное правилом: $(x, y) = \mathcal{A}(x, y)\ \forall\ x, y \in V$ является скалярным произведением, т.к. оно удовлетворяет всем аксиомам (*) скалярного произведения.

----

*: Отображение (,) : $V \times V \to P$ называется ***скалярным произведением***, если оно удовлетворяет аксиомам: для $\forall\ x, y, z \in V$ и $\forall\ \alpha \in P$

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)

2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ 3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$

4) $(x, x) \geq 0$ для $\forall\ x \in V$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

**: (сигнатурное правило Якоби). *Пусть Δ_k – угловой минор k–го порядка матрицы КФ $\mathcal{A}(x, x)$ ранга r и*

$\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1,r}$. *Тогда* $\pi = P(\Delta_0, ..., \Delta_k)$, $\nu = V(\Delta_0, ..., \Delta_k)$ где $P(\Delta_0, ..., \Delta_k)$ и $V(\Delta_0, ..., \Delta_k)$ – число совпадений и перемен знаков в последовательности $\Delta_0, ...,\Delta_k$.

47. Общий вид скалярного произведения в конечномерном евклидовом и унитарном пр–твах.

Пусть V – вещественное или комплексное линейное пр–во. Отображение $(\ ,\ ): V\times V \to P$ называется ***скалярным произведением***, если оно удовлетворяет аксиомам: для $\forall\, x, y, z \in V$ и $\forall\, \alpha \in P$

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, (в вещественном случае без черты)
2) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
3) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$
4) $(x, x) \geq 0$ для $\forall\, x \in V$, $\quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Вещественное линейное пр–во со скалярным произведением называется ***евклидовым пр–вом E***, комплексное – ***унитарным V***.

Матрицей Грама *системы векторов* $a_1, \dots, a_n$ евклидова (унитарного) пр–ва называется матрица

$$G(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_n, a_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_1, a_n) & \cdots & (a_n, a_n) \end{pmatrix} \quad (\mathbf{1})$$

Определитель матрицы Грама называется ***определителем Грама***.

Свойства матрицы Грама:

1. Система векторов $a_1, \dots, a_n$ евклидова (унитарного) пр–ва линейно зависима $\Leftrightarrow$ $\det G(a_1, \dots, a_n) = 0$
2. Матрица Грама системы векторов евклидова и унитарного пр–ва самосопряженная: эрмитова
($G^H = G$) для унитарного пр–ва, симметрическая
($G^T = G$) для евклидова.
3. Определитель Грама линейно независимой системы векторов в евклидовом (унитарном) пр–ве >0

Пусть $a_1, \dots, a_n$ – базис пространства и $x = \sum_{i=1}^n x_i a_i$, $\quad y = \sum_{j=1}^n y_j a_j$. Тогда скалярное произведение векторов x и y имеет вид

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n x_i a_i, \sum_{j=1}^n y_j a_j\right) = \sum_{j=1}^n \overline{y_j}\left(\sum_{i=1}^n (a_j, a_i) x_i\right) = \\ = Y^* G X$$

где $G = G(a_1, \dots, a_n)$ – матрица Грама вида (1),
$X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$.

Формула $(x, y) = Y^* G X$ задает ***общий вид скалярного произведения в евклидовом и унитарном пр–вах.***

48. Гиперповерхность 2-го порядка в евклидовом пространстве. Приведенные уравнения.

Пусть $\mathcal{A}(x, x)$ – ненулевая квадратичная форма, $g(x)$ – линейная форма, заданные в евклидовом пр–ве E, c – вещественная константа. Множество векторов $x \in E$: $\mathcal{A}(x, x) + 2g(x) + c = 0 \quad$ **(1)**

называется ***гиперповерхностью 2–го порядка*** *в евкли–довом пр–ве E* (при $\dim E = 2$ это линия 2–го порядка). (1) – *общее уравнение ги-перповерхности 2–го порядка.*

Пусть $e = (e_1, \dots, e_n)$ – базис пр–ва E, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица КФ $\mathcal{A}(x, x)$ в этом базисе, $b_i = g(e_i)$, $i = \overline{1, n}$, – коэффициенты линейной формы и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Из представления квадратичной и линейной форм в виде

$$\mathcal{A}(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j\,, a_{ij} = a_{ji}, \quad g(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i$$

(1) можно записать в виде

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0\,, \qquad a_{ij} = a_{ji} \quad (\mathbf{2})$$

или, в компактной форме, при $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $b = (b_1, \dots, b_n)^T$: $\quad X^T A X + 2b^T X + c = 0$, $A^T = A \quad$ **(3)**

Пусть e – ОНБ пр–ва E и пусть в этом базисе уравнение гиперповерхности имеет вид (2).

1. Приведем КФ $\mathcal{A}(x, x)$ к главным осям, т.е. найдем ОНБ f, в котором КФ $\mathcal{A}(x, x)$ имеет канонический вид: $\mathcal{A}(x, x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$.
Канонические коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ будут при этом определены однозначно. Можно считать, что
$\lambda_k \neq 0$ при $k \leq r$ (где $r = \mathrm{rg}\, \mathcal{A}(x, x)$) и $\lambda_k = 0$ при $k > r$. При переходе от e к базису $f = eQ$ (2) ортогональным преобразованием координат (Т*) преобразуется в

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k x_k'^2 + 2\sum_{k=1}^n b_k' x_k' + c = 0 \quad (\mathbf{4})$$

2. Пусть $a \in E$. Отображение $\varphi : E \to E$, определенное равенством $\varphi(x) = x + a$, $\forall\, x \in E$, называется *пара–ллельным переносом пр–ва E на вектор a.* $\operatorname{im} \varphi = E$.
Если в (4) $\lambda_k \neq 0$ для некоторого k, то $\lambda_k x_k'^2 + 2b_k' x_k' == \lambda_k(x_k' + b_k'/\lambda_k)^2 - b_k'^2/\lambda_k$. Пусть $x_k'' = x_k' + b_k'/\lambda_k$, => исчезает переменная x_k'' в 1–й степени.
Выполнение таких преобразований для всех $k = \overline{1, r}$ $\Leftrightarrow$ параллельному переносу на вектор с координатами $(b_1'/\lambda_1, \dots, b_r'/\lambda_r, 0, \dots, 0)$ => из (4) получим:

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k x_k''^2 + 2\sum_{k=r+1}^n b_k' x_k'' + c' = 0,$$
$$\text{где } c' = c - \sum_{k=1}^r b_k'^2/\lambda_k \quad (\mathbf{5})$$

3. В (5) возможны 2 случая:
а) $b'_{r+1} = \dots = b'_n = 0$; $\quad$ б) $\exists\, b'_k \neq 0$, $k > r$.
В "а" (5) имеет вид $\lambda_1 x_1''^2 + \dots + \lambda_r x_r''^2 + c' = 0$
В "б" выполним еще одно ортогональное преобра–зование координат. Матрица S этого преобразования строится так. Рассмотрим арифметический вектор $(b'_{r+1}, \dots, b'_n) \in \mathbb{R}^{n-r}$. По условию он не 0–ой и его можно нормировать: если $\alpha = \left(\sum_{k=r+1}^n b_k'^2\right)^{1/2}$, то вектор $s_1 = (b'_{r+1}/\alpha, \dots, b'_n/\alpha)$ – ортонормированная система из 1 вектора. Дополним этот вектор до ОНБ
$s_1, \dots, s_{n-r}$ пр–ва $\mathbb{R}^{n-r}$. Обозначая $s_i = (s_{i,r+1}, \dots, s_{i\,n})$, $i = \overline{1, n-r}$, искомая матрица S :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & s_{1,r+1} & \dots & s_{1n} \\ & 0 & & & \dots & \\ & & & s_{n-r,r+1} & \dots & s_{n-r,n} \end{bmatrix}$$

Матрица S ортогональна (т.к. ее строки ортонорми–рованы) => преобразование базиса с помощью S приводит к новому ОНБ. Преобразо-вание координат : $x_k''' = x_k''$ $\quad$ при $k = \overline{1, r}$

$$x_{r+1}''' = \alpha^{-1} \sum_{k=r+1}^n b_k' x_k''$$

$$x_k''' = \sum_{i=r+1}^n s_{ki} x_i'' \text{ при } k = \overline{r+2, n}$$

приводит (5) к $\lambda_1 x_1'''^2 + \dots + \lambda_r x_r'''^2 + 2\alpha x_{r+1}''' + c' = 0$
В нем можно освободиться от c', если выполнить параллельный перенос на вектор, у которого все координаты, кроме $(r+1)$–й (равной $c'/(2\alpha)$), равны 0.
Итак, с помощью параллельного переноса и перехода к новому ОНБ общее уравнение (2) приводится к 1 из 2 типов ***приведенных уравнений гиперповерхности***:

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + a_0 = 0, \quad \lambda_1 \dots \lambda_r \neq 0,$$
$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 + b_0 x_{r+1} = 0, \quad \lambda_1 \dots \lambda_r b_0 \neq 0$$

***:** *Матрица ортогональна (унитарна)* $\Leftrightarrow$ *она является матрицей перехода от одного ОНБ к другому ОНБ евклидова (унитарного) пр–ва*

49. Нормированное пр–во. Нормы Гёльдера.

V – линейное пр–во, вещественное или комплексное. ***Норма*** в V – отображение $\|\bullet\|$: $V\to\mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall\, x\in V$ число $\|x\|\in\mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall\, x, y\in V$ и $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$

1) $\|x\|\ge 0,\quad \|x\|=0\ \Leftrightarrow x=\theta$
2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$;
3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника).

Линейное пр–во V с заданной на нем нормой $\|\bullet\|$ называется ***линейным нормированным пр–вом***. Число $\|x\|$ называется ***нормой вектора x.***

Вещественная ф–я $f(x)$ ***выпукла*** на интервале $I=(a, b)$, если для $\forall\, x, y\in I$ и $\forall$ числа $0\le t\le 1$:

$$f(tx+(1-t)\,y)\le t\,f(x)+(1-t)\,f(y)\ \textbf{(1)}$$

$g(x)$ ***вогнута*** на I, если $f(x)\equiv -g(x)$ выпукла на I.

Т. *Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на I и $f''(x)$ – ее 2–я производная. Если $f''(x)>0$ при всех $x\in I$, то $f(x)$ выпукла на I.*

Док–во. При $x=y$ (1) – равенство. При $t=0$ или $t=1$ равенство получается при $\forall\, x, y$. Пусть $a<x<y<b$ и $0<t<1$. Тогда для $z=tx+(1-t)\,y$ имеем $x<z<y$. По Т Лагранжа, $\exists$ точки ξ и η :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=f'(\xi),\qquad x<\xi<z,$$
$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z}=f'(\eta),\qquad x<\eta<z$$

По Т Лагранжа для некоторой точки ζ получаем

$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z}-\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=f''(\zeta)(\eta-\xi)\ge 0,\qquad \xi<\zeta<\eta$$

Остается учесть, что $t=(y-z)\,/\,(y-x)$ и заметить, что левая часть имеет вид

$$\frac{f(x)(y-z)+f(y)(z-x)-f(z)(y-x)}{(y-z)(z-x)}==\frac{tf(x)+(1-t)f(y)-f(z)}{(y-z)(z-x)}(y-x)$$

Сл. *Функция* $\ln x$ *является вогнутой.*

Док–во**.** $(\ln x)''=-1/x^2<0$.

Лемма (неравенство Юнга). *Пусть положительные числа p, q таковы, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогда*

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\qquad \forall a,b\ge 0$$

Док–во. В силу вогнутости логарифма,

$$\ln(ab)\le\frac{\ln a^p}{p}+\frac{\ln b^q}{q}\le\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)$$

Неравенства Гельдера. *В условиях леммы для $\forall$ комплексных чисел $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ справедливо* :

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}$$

Док–во. Пусть

$$a=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p},b=\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}$$

При $a=0$ или $b=0$ неравенство очевидно. Если $a\ne 0$ и $b\ne 0$, то, используем лемму для $|x_i|/a$, $|y_i|/b$:

$$(|x_i|/a)(|y_i|/b)\le\frac{|x_i|^pa^p}{p}+\frac{|y_i|^qb^q}{q},\qquad i=1,\ldots,n$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|\right)/(ab)\le\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Неравенство Минковского. *Пусть $p\ge 1$, $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ – произвольные комплексные числа. Тогда*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}$$

Док–во. При $p=1$ неравенство проверяется очевидным образом. В случае $p>1$имеем

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\le\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{p-1}|x_i+y_i|\le$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}|x_i||x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|y_i||x_i+y_i|^{p-1}$$

Для каждой суммы справа применим неравенство Гельдера, взяв $q=p/(p-1)$ $\Rightarrow\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\le\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

Остается заметить, что $(p-1)q=p$ и $1-1/q=1/p$. •

Пусть $x=[x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^n$. При $p\ge 1$ положим

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$$

При фиксированном x

$$\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\max_{1\le i\le n}|x_i|\quad\Rightarrow\quad\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

$\|x\|_p$ – *p–нормы* или **нормы Гельдера**.

Неравенства Гельдера и Минковского сохраняют силу при $p=\infty$ (в этом случае $q=1$). Для док–ва достаточно перейти к пределу при $p\to\infty$.

Т. *При любом $p\ge 1$, включая $p=\infty$, величина $\|x\|_p$ является нормой на $\mathbb{C}^n$.*

Док–во. Свойства (1) и (2) нормы очевидны. Неравен–ства треугольника – это неравенство Минковского.

50. Длина вектора. Тождество параллелограмма.

Отображение (,) : $V\times V\to P$ называется ***скалярным произведением***, если оно удовлетворяет аксиомам: для $\forall\, x, y, z\in V$ и $\forall\,\alpha\in P$

1) $(x, x)\ge 0$ для $\forall\ x\in V$, $\quad (x, x)=0\Leftrightarrow x=\theta$
2) $(x, y)=\overline{(y,x)}$, (в вещественном случае без черты)
3) $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$ 4) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$

Вещественное линейное пр–во со скалярным произ–ведением – ***евклидово***, комплексное – ***унитарное***.

V – линейное пр–во, вещественное или комплексное. ***Норма*** в V – отображение $\|\bullet\|$: $V\to\mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall$ вектору $x\in V$ число $\|x\|\in\mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall\, x, y\in V$ и $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$

1) $\|x\|\ge 0,\quad \|x\|=0\ \Leftrightarrow x=\theta$ $\quad$ 2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$;
3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника).

Линейное пр–во V с заданной на нем нормой $\|\bullet\|$ – ***линейное нормированное пр–во***. Число $\|x\|$ – ***норма вектора x.*** В евклидовом (унитарном) пр–ве норма – длина: $\|x\|=|x|$ Это ***евклидова норма*** : $||x||_E=\sqrt{(x,x)}$

Справедливость аксиом нормы вытекает из свойств длины: из аксиом скалярного произведения =>

1°. $\forall$ вектор x евклидова (унитарного) пр–ва имеет длину, при этом $|x|\ge 0$, $\forall x\in E$ (U) и $|x|=0\Leftrightarrow x=\theta$.

2°. $|\alpha x|=|\alpha|\,|x|$, $\forall x\in E\ (U)$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$.

3°. Неравенство Коши–Буняковского ($|(x, y)|^2\le(x, x)\ (y, y)$) в новой терминологии: $|(x, y)|\le|x|\cdot|y|$. Тогда $|x+y|^2=|x|^2+|y|^2+(x,y)+(y,x)\le|x|^2+|y|^2+2|x||y|=(|x|+|y|)^2$

Тождество параллелограмма:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\quad\forall x,y\in V$$

Т. *Норма является евклидовой $\Leftrightarrow$ для $\forall$ f и g из нормы выполняется тождество параллелограмма.*

Док–во. 1). Пусть V – пр–во со скалярным произведением. Пусть $(x, y)=a+\boldsymbol{i}b$, где a, $b\in\mathbb{R}$. Тогда если $\|x\|=|x|$, то

$$\|x+y\|^2=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=$$
$$=\|x\|^2+\|y\|^2+2a$$
$$\|x+\boldsymbol{i}y\|^2=(x,x)+\boldsymbol{i}(x,y)-\boldsymbol{i}(y,x)+(y,y)=$$
$$=\|x\|^2+\|\boldsymbol{i}y\|^2+2a$$

=> $a=f(x, y)$ и $b=g(x, y)$, где

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2),$$
$$g(x,y)=\frac{1}{2}(\|x+\boldsymbol{i}y\|^2-\|x\|^2-\|\boldsymbol{i}y\|^2)$$

2) Пусть V – нормированное пр–во. Если норма порожда–ется скалярным произведением, то оно обязано иметь вид $(x, y)=f(x, y)+\mathbf{i}g(x, y)$ **(1)**

Пусть (1) – определение функции (x, y), докажем, что она обладает всеми св–вами скалярного произведения.

$(x,x)=\|x\|^2$ => 1–я аксиома очевидна. Равенство $f(x, y)=f(y, x)$ очевидно, $g(x, y)=-g(y, x)$ получается с помощью тождества параллелограмма => $(x, y)=\overline{(y,x)}$.

Пусть норма удовлетворяет тождеству параллелограмма, докажем, что функция (x, y) линейна по 1–му аргументу (3–я и 4–я аксиомы). Достаточно доказать линейность $f(x, y)$ по 1–му аргументу (линейность $g(x, y)$ по 1–му аргументу – очевидное следствие). Докажем, что $f(x+y, z)=f(x, z)+f(y, z)$. Из определения f и тождества параллелограмма :

$$f(x,z)=\frac{1}{4}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2),$$
$$f(y,z)=\frac{1}{4}(\|y+z\|^2-\|y-z\|^2)$$

Запишем $\quad x+z=u+v,\ \ y+z=u-v\ \Rightarrow$

$u=\frac{1}{2}(x+y+2z),\quad v=\frac{1}{2}(x-y)$. В силу тождества параллелограмма для векторов u и v,

$$\|x+z\|^2+\|y+z\|^2=\frac{1}{2}\|(x+y+z)+z\|^2+\frac{1}{2}\|x-y\|^2$$
$$\|x-z\|^2+\|y-z\|^2=\frac{1}{2}\|(x+y-z)-z\|^2+\frac{1}{2}\|x-y\|^2$$

Из тождества параллелограмма для $x+y+z$ и z

$$\frac{1}{2}\|(x+y+z)+z\|^2=\|x+y+z\|^2+\|z\|^2-\frac{1}{2}\|x+y\|^2$$
$$\frac{1}{2}\|(x+y-z)-z\|^2=\|x+y-z\|^2+\|z\|^2-\frac{1}{2}\|x+y\|^2$$
$$\Rightarrow\ f(x,z)+f(y,z)=\frac{1}{4}(\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2)==f(x+y,z)$$

Докажем, что $f(\alpha x, y)=\alpha f(x, y)$ для $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$. Пусть $\alpha=\frac{m}{n}$ – рациональное число =>

$$nf\left(\frac{1}{n}x,y\right)=f\left(n\left(\frac{1}{n}x\right),y\right)=f(x,y)\ \Rightarrow$$
$$f\left(\frac{1}{n}x,y\right)=\frac{1}{n}f(x,y)\ \Rightarrow$$
$$f\left(\frac{m}{n}x,y\right)=f\left(m\left(\frac{1}{n}x\right),y\right)=mf\left(\frac{1}{n}x,y\right)=\frac{m}{n}f(x,y)$$

Произвольное вещественное α представим как предел последовательности рациональных $\alpha_k\to\alpha$. Функция $f(x, y)$ непрерывна по x. Поэтому в $f(\alpha_k\, x, y)=\alpha_k\, f(x, y)$ можно перейти к пределу при $k\to\infty$. Т.о., мы доказали равенство $(\alpha x, y)=\alpha\,(x, y)$ для вещественных α. Оно будет верно для любых комплексных α, если мы установим, что $(\mathbf{i}x, y)=\mathbf{i}(x, y)$. Это вытекает из определения (1), вида функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ и тождества параллелограмма. •

51. Эквивалентность норм в конечномерном пр–ве.

V – линейное пр–во, вещественное или комплексное. ***Норма*** в V – отображение $\|\bullet\|: V \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall$ вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall\, x, y \in V$ и $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

В евклидовом (унитарном) пр–ве норма – длина:

$\|x\| = |x|$ Это ***евклидова норма***: $||x||_E = \sqrt{(x, x)}$ **(1)**

Справедливость аксиом нормы вытекает из свойств длины: из аксиом скалярного произведения =>

1°. $\forall$ вектор x евклидова (унитарного) пр–ва имеет длину, при этом $|x| \geq 0$, $\forall x \in E\,(U)$ и $|x| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

2°. $|\alpha x| = |\alpha||x|$, $\forall x \in E\,(U)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$.

3°. Неравенство Коши–Буняковского ($|(x, y)|^2 \leq (x, x)\,(y, y)$) в новой терминологии: $|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$.

Тогда $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + (x, y) + (y, x) \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2$

Мн–во M называется ***метрическим пр–вом***, если задано отображение ρ: $M \times M \to \mathbb{R}$, которое каждой упорядо–ченной паре $x, y \in M$ ставит в соответствие $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\forall\, x, y \in M$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall\, x, y \in M$

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ $\forall\, x, y \in M$.

$\rho(x, y)$ – ***расстояние между x и y***; отобр–е ρ – ***метрика***

У1. *В нормированном пр–ве V отображение ρ: $V \times V \to \mathbb{R}$, определенное $\rho(x, y) = \| x - y \|$, $\forall\, x, y \in V$ – метрика*.

Аксиомы метрики вытекают из аксиом нормы. •

Посл–сть векторов $\{x^{(k)}\}$ в нормированном пр–ве V называется ***сходящейся по норме*** к вектору $a \in V$, если $\lim_{k\to\infty}\|x^{(k)} - a\| = 0$, вектор a – ***предел посл–сти*** $\{x^{(k)}\}$ ***по норме*** $\|\bullet\|$: $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$

У2. *Сходящаяся по норме последовательность имеет единственный предел.* Док–во из аксиомы треугольника: $\|a - b\| = \|a - x^{(k)} + x^{(k)} - b\| \leq \|x^{(k)} - a\| + \|x^{(k)} - b\|$, где a и b – 2 предела $x^{(k)}$. •

Пусть $x_0 \in V$ и $r > 0$. $S\,(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| = r\}$ – ***сфера радиуса r с центром x_0 по норме*** $\|\bullet\|$, множество $B\,(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ – замкнутый ***шар радиуса r с центром x_0 по норме*** $\|\bullet\|$. Сферы и шары по евклидовой норме: $S_E\,(x_0, r)$, $B_E\,(x_0, r)$.

У3. *Из $\forall$ посл–сти векторов $x^{(k)} \in B_E\,(x_0, r)$ (или $S_E\,(x_0, r)$) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме $||\cdot||_E$ к вектору $a \in B_E\,(x_0, r)$ ($S_E\,(x_0, r)$).*

Док–во. Пусть $x_0 = \theta$ => сфера $S_E\,(r) = \{x \in V \mid \|x\|_E = r\}$. Пусть $e_1, ..., e_n$ – ОНБ пр–ва V и $x^{(k)} = \sum_{i=1}^n x_i^{(k)}\, e_i \in S_E(r)$

$$=> \ \|x^{(k)}\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \left|x_i^{(k)}\right|^2\right)} = r$$

=> ограниченность координат векторов $x^{(k)}$ посл–сти. По теореме Больцано–Вейерштрасса из этой посл–сти можно выделить сходящуюся (покоординатно) подпосл–сть $\{x^{(k_m)}\}$. Пусть $x^{(k_m)}$ имеет координаты $x_1^{(k_m)}, \dots, x_n^{(k_m)}$, сходящиеся соответственно к $a_1, ..., a_n$ и $a = \sum_{i=1}^n a_i\, e_i$ =>

$$\|x^{(k_m)} - a\|_E = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \left|x_i^{(k_m)} - a_i\right|^2\right)} \to 0$$

=> $\{x^{(k_m)}\} \to a$ по евклидовой норме.

Покажем, что $a \in S_E\,(r)$. В $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x\| - \|y\|$ положим $x = x^{(k_m)}$, $y = a$ =>

$$\left|\|x^{(k_m)}\|_E - \|a\|_E\right| \leq \|x^{(k_m)} - a\|_E => \|x^{(k_m)}\|_E - \|x^{(k_m)} - a\|_E \leq \|a\|_E \leq \|x^{(k_m)}\|_E + \|x^{(k_m)} - a\|_E$$

или, т.к. $\|x^{(k_m)} - a\|_E \to 0$:

$$\|x^{(k_m)}\|_E - \varepsilon \leq \|a\|_E \leq \|x^{(k_m)}\|_E + \varepsilon, \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

если m достаточно велико => $\|a\|_E = r$ и $a \in S_E\,(r)$. •

2 нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ в линейном пр–ве V называются ***эквивалентными,*** если $\exists$ такие числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что для $\forall\, x \in V$:

$\|x\|_1 \leq c_1\|x\|_2$, $\|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$

Т. *В конечномерном пр–ве $\forall$ 2 нормы эквивалентны*.

Док–во. Выберем в V $\forall$ базис $e = (e_1, ..., e_n)$ и введем скалярное произведение $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$ => V – евкли–дово и в нем можно рас-сматривать евклидову норму (1). Т.к. e – ОНБ, то $\|x\|_E = |x| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$. Пока–жем, что $\forall \|\bullet\|$ в V эквивалентна евклидовой норме $||x||_E$

1. Докажем: $\exists\, c_1 > 0$: для $\forall\, x \in V$ $\|x\| \leq c_1\|x\|_E$ **(2)**

Пусть $x \in V$ и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Тогда $\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\|e_i\|$ и из неравенства Коши–Буняковского ($|(x, y)|^2 \leq (x, x)\,(y, y)$)

$$\|x\| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2} = c_1\|x\|_E,$$

$$\text{где} \quad c_1 = \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2\right)^{1/2} > 0$$

2. Докажем: $\exists\, c_2 > 0$: для $\forall\, x \in V$ $\|x\|_E \leq c_2\|x\|$ **(3)**

а) Пусть мн–во координат всех векторов сферы $S = \{x \in V \mid \|x\| = 1\}$ не ограничено => для $\forall\, m \in \mathbb{N}$ $\exists$ $x^{(m)}$: $\|x^{(m)}\| = 1$ и $\left|x_k^{(m)}\right| > m$ для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$

$$=> \|x^{(m)}\|_E = \left(\sum_{i=1}^n \left|x_i^{(m)}\right|^2\right)^{1/2} \geq \left|x_k^{(m)}\right| > m \quad \textbf{(4)}$$

Рассмотрим посл–сть $y^{(m)} = x^{(m)}/\|x^{(m)}\|_E$ **(5)**

$\|y^{(m)}\|_E = 1$ => $y^{(m)} \in S_E\,(1)$. По У3 из $\{y^{(m)}\}$ выделить подпосл–сть $\{y^{(m_j)}\}$, сходящуюся по $\|\bullet\|_E$ к $a \in S_E\,(1)$, т.е.

$$\|y^{(m_j)} - a\|_E \to 0 \quad \textbf{(6)} \qquad \|a\|_E = 1 \qquad \textbf{(7)}$$

Из (6) с учетом (2) => $\|y^{(m_j)} - a\| \to 0$ **(8)**

=> $\{y^{(m_j)}\}$ сходится к вектору a по норме $\|\bullet\|$.

С другой стороны, в силу (5), (4) с учетом $\|x^{(m_j)}\| = 1$: $\|y^{(m_j)}\| = \|x^{(m_j)}\|/\|x^{(m_j)}\|_E < 1/m_j$ => $\|y^{(m_j)}\| \to 0$. Отсюда и из (8) в силу единственности предела => $a = \theta$, что противоречит (7). Т.о., $\exists\, M$: для $\forall$ $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in S$ выполняется неравенство $|x_i| \leq M$, $i = \overline{1, n}$ **(9)**

б) Пусть $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ – $\forall$ вектор пр–ва V, тогда вектор $\frac{x}{\|x\|} \in S$ и для его координат выполняется (9) => $\frac{|x_i|}{\|x\|} \leq M$, $|x_i| \leq M\|x\|$, $i = \overline{1, n}$ и $\|x\|_E = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \leq$

$\leq M\sqrt{n}\|x\| = c_2\|x\|$, где $c_2 = M\sqrt{n} > 0$. •

Сл. *В конечномерном пр–ве из сходимости по одной норме следует сходимость по $\forall$ другой норме,* т.к. $\|x^{(k)} - a\|_1 \leq c_1\|x^{(k)} - a\|_2$

52. Задача о наилучшем приближении в конечномерном нормированном пространстве.

V – линейное пр–во, вещественное или комплексное. ***Норма*** в V – отображение $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall$ вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall\, x, y \in V$ и $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1) $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Мн–во M называется ***метрическим пр–вом***, если задано отображение ρ : $M \times M \to \mathbb{R}$, которое каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in M$ ставит в соответствие число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$:

1) $\rho(x, y) \ge 0$, $\forall\, x, y \in M$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall\, x, y \in M$

3) $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)\ \forall\, x, y \in M$.

Посл–сть векторов $\{x^{(k)}\}$ в нормированном пр–ве V называется ***сходящейся по норме*** к вектору $a \in V$, если $\lim_{k\to\infty}\|x^{(k)} - a\| = 0$, вектор a – ***предел*** $\{x^{(k)}\}$ ***по норме*** $\|\bullet\|$: $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$ или $x^{(k)} \to a$.

Пусть $x_0 \in V$ и $r > 0$. $S(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| = r\}$ – ***сфера радиуса r с центром x_0 по норме*** $\|\bullet\|$,

$B(x_0, r) = \{x \in V \mid \|x - x_0\| \le r\}$ – замкнутый ***шар радиуса r с центром x_0 по норме*** $\|\bullet\|$

Мн–во S ***ограниченно***, если оно целиком содержится в некотором шаре.

Мн–во S ***замкнуто***, если оно содер–жит все свои предельные точки.

Мн–во S ***компактно***, если из $\forall$ посл–сти точек $x^k \in S$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in S$.

Компактное множество обязано быть замкнутым. Обратное не верно: метрическое пр–во M всегда является замкнутым множеством, но может и не быть компактным. $\forall$ компактное множество S является ограниченным (подпоследовательность неограниченной послед–сти не может быть сходящейся, т.к. не может быть ограниченной).

Вещественная функция $f(x)$, определенная для точек x метрического пр–ва M, называется ***непрерывной*** в $x \in M$, если для $\forall\, \{x^k\} \to x$, посл–сть $f(x^k) \to f(x)$.

Т (Вейерштрасса). *Для $\forall$ вещественной $f(x)$, непре–рывной во всех точках компактного множества S,*

$\exists$ точки x_{min}, $x_{max} \in S$: $f(x_{min}) < f(x) < f(x_{max})$ для $\forall\, x \in S$

Док–во. Пусть $f(x^k) > k$ для некоторой $\{x^k\} \in S$ => если $x^{k_i} \to x$, то т.к. $f(x)$ непрерывна, $f(x^{k_i}) \to f(x)$, но $f(x^{k_i})$ не может сходиться, т.к. не ограниченна => противоречие => $f(x)$ ограничена сверху. Пусть c_{max} – ТВГ $\{f(x), x \in S\}$ => для $\forall\, k\ \exists$ точка $x^k \in S$:

$c_{max} - 1/k \le f(x^k) \le c_{max}$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $x^{k_i} \to x$ и перейдем в последних неравенствах к пределу => $f(x) = c_{max}$. Ограниченность снизу и существование точки минимума доказывается переходом к $g(x) = -f(x)$. •

Л1. *Для произвольной нормы $\|\bullet\|$ в пр–ве $\mathbb{C}^n$ функция $f(x) = \|x\|$ непрерывна относительно 2–нормы*.

Док–во. Пусть $x^k = [x_1^k, \dots, x_n^k]^T \to x = [x_1, \dots, x_n]^T$. Используя неравенство треугольника для норм:

$$|f(x^k) - f(x)| = |\|x^k\| - \|x\|| \le \|x^k - x\| \le$$
$$\le \sum_{1\le i\le n} |x_i^k - x_i|\,\|e_i\|$$

где $e_i = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T$. Правая часть $\to 0$ при $x^k \to x$

$$\|x^k - x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i|^2\right)^{1/2} \to 0 \quad \blacksquare$$

Пусть $x \in V$ и L – непустое множество векторов из V. ***Расстояние*** между x и L – величина

$$\gamma = \inf_{z\in L} \|x - z\|$$

Вектор $z_0 \in L$ называется ***элементом наилучшего приближения*** для x на L, если $\gamma = \|x - z_0\|$.

Л2 (о наилучшем приближении). *Пусть L конечномерное подпространство в нормированном пр–ве V. Тогда для $\forall\, x \in V\ \exists$ вектор $z_0 \in L$* :

$$\|x - z_0\| \le \|x - z\|\ \forall z \in L.$$

Док–во. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\forall z$ такой, что $\|x - z\| \le \gamma + \varepsilon$ => $\|z\| \le R \equiv \gamma + \varepsilon + \|x\|$ => $\gamma = \inf_{z\in L,\ \|z\|\le R} \|x - z\|$. По Л1 $f(x) = \|x - z\|$ непрерывна на замкнутом шаре $\|z\| \le R$ конечномерного пр–ва L. По теореме Вейерштрасса, $\gamma = \|x - z_0\|$ для некоторого $z_0 \in L$ (). •

53. ЛО в нормированных пр–вах. Непрерывность и ограниченность. Норма ЛО.

Пусть V и W – линейные пр–ва над общим полем P. Отображение $\mathcal{A}$: $V \to W$ называется ЛО***, действующим из пр–ва V в пр–во W***, если для $\forall$ $x, y \in V$, $\alpha \in P$: 1) $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$ 2) $\mathcal{A}(\alpha x) = \alpha\mathcal{A}x$.

Норма в V – отображение $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall$ вектору $x \in V$ число $\|x\| \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall$ $x, y \in V$ и $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

V и W – линейные нормированные пр–ва (оба вещественные или комплексные). Норма ЛО в пр–ве $\mathcal{L}(V, W)$ ***согласованна*** с векторными нормами $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$ пр–ств V и W, если для $\forall$ $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$:

$$\|\mathcal{A}x\|_W \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|_V, \quad \forall x \in V$$

Т1. *Собственное значение ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ не превосходит по модулю $\forall$ его согласованную норму.*

Док–во. $\mathcal{A}x = \lambda x$ => для $\forall$ согласованной нормы: $\|\mathcal{A}x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ и $\|\mathcal{A}x\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|$ => $|\lambda| \leq \|\mathcal{A}\|$ •

ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ ***непрерывен*** в точке$x \in V$, если для $\forall$ $\{x_k\} \in V : x_k \to x$ при $k \to \infty$, послед–сть образов $\mathcal{A}x_k \to \mathcal{A}x$: $\|x_k - x\|_V \to 0 \;\; => \;\; \|\mathcal{A}x_k - \mathcal{A}x\|_W \to 0$

Оператор называется ***непрерывным на V***, если он непрерывен при $\forall$ $x \in V$. Оператор называется ***ограни–ченным***, если единичную сферу в V он переводит в ограниченное по норме пр–ва W множество, т.е. если $\exists c > 0$: для $\forall$ $x \in V$ ($\|x\| = 1$) выполняется $\|\mathcal{A}x\| \leq c$, или, если $\exists$ $c > 0$: $\|\mathcal{A}x\|_W \leq c\|x\|_V$ $\forall x \in V$.

Т2. *В конечномерных нормированных пр–вах V и W $\forall$ ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ ограничен.*

Док–во. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис пр–ва V и $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ => согласно аксиомам нормы и неравенству Коши–Буняковского ($|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$)

$$\|\mathcal{A}x\|_W \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|\mathcal{A}e_i\|_W \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{A}e_i\|_W^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = M\|x\|_E,$$

$$\text{где } M = \left(\sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{A}e_i\|_W^2\right)^{1/2}$$

Т.к. в конечномерном пр–ве $\forall$ 2 нормы эквивалентны, то $\exists$ $c_2 > 0$: для $\forall$ $x \in V$: $\|x\|_E \leq c_2\|x\|_V$ =>

$\|\mathcal{A}x\|_W \leq c\|x\|_V$, где $c = Mc_2 > 0$. •

Т3. *Для непрерывности ЛО необходима и достаточна его ограниченность.*

Док–во. Дост–сть из неравенства

$\|\mathcal{A}x_k - \mathcal{A}x\|_W = \|\mathcal{A}(x_k - x)\|_W \leq c\|x_k - x\|_V$.

Необх–сть. Пусть множество значений нормы $\|\mathcal{A}x\|_W$ на единичной сфере $S = \{x: \|x\|_V = 1\}$ не ограничено => $\exists$ $\{x_k\} \in S : \|\mathcal{A}x_k\|_W \to \infty$.

Пусть $y_k = x_k / \|\mathcal{A}x_k\|_W$ => $\|y_k\|_V = 1/\|\mathcal{A}x_k\|_W \to 0$ => $\|\mathcal{A}y_k\|_W \to 0$.

Это невозможно, т.к. $\|\mathcal{A}y_k\|_W = 1$ для $\forall$ k => $\exists$ $c > 0$:

$$\|\mathcal{A}x\|_W \leq c \;\; \forall x \in S \;\; => \;\; \|\mathcal{A}x\|_W \leq c\|x\|_V \;\; \forall x \in S \quad \blacksquare$$

Пусть V, W – конечномерные пр–ва и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$. Из Т2 => ограниченность $\mathcal{A}$ => $\exists$ $c > 0$: $\|\mathcal{A}x\|_W \leq$ $\leq c\|x\|_V$ $\forall x \in V \Leftrightarrow \|\mathcal{A}x\|_W / \|x\|_V \leq c$ $\forall x \neq \theta$ => числовое $\left\{\frac{\|\mathcal{A}x\|_W}{\|x\|_V} \middle| \forall x \neq \theta\right\}$ ограничено сверху => для него $\exists$ ТВГ. Положим

$$\mu(\mathcal{A}) = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\mathcal{A}x\|_W}{\|x\|_V} \quad \mathbf{(1)}$$

Т4. *Отображение $\mu(\mathcal{A})$ – норма в пр–ве $\mathcal{L}(V, W)$.*

Док–во. $\mu(\mathcal{A}) \geq 0$ для $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, и равенство $\mu(\mathcal{A}) = 0$ означает: $\|\mathcal{A}x\|_W = 0$ $\forall x \in V$, т.е. $\mathcal{A}x = \theta$, или $\mathcal{A} = \mathcal{O}$. Аксиомы 2 и 3 вытекают из свойств ТВГ. •

Норма $\mu(\mathcal{A})$ называется ***нормой*** оператора $\mathcal{A}$, ***подчиненной*** векторным нормам пространств V и W:

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|\mathcal{A}x\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V = 1} \|\mathcal{A}x\|_W$$

Свойства подчиненной нормы.

1. Согласованность: $\|\mathcal{A}x\|_W \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|x\|_V$ $\forall x \in V$, т.к., согласно (1), $\|\mathcal{A}x\|_W / \|x\|_V \leq \mu(\mathcal{A}) = \|\mathcal{A}\|$
2. Она – наименьшая из всех согласованных норм.
3. Мультипликативность, т.е. $\|\mathcal{AB}\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|$, т.к.

$$\|\mathcal{AB}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{AB}x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}x\| =$$
$$= \|\mathcal{A}\| \sup_{\|x\|=1} \|\mathcal{B}x\| = \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|$$

Пусть V, W – евклидовы (унитарные) пр–ва. Норма ЛО $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$, порожденная евклидовыми нормами вектора, называется ***спектральной нормой*** :

$$\|\mathcal{A}\|_2 = \sup_{\|x\|_E = 1} \|\mathcal{A}x\|_E = \sup_{(x,x)=1} \sqrt{(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x)}$$

Сингулярные числа оператора $\mathcal{A}$ – квадратные корни из собственных значений оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Т5. *Спектральная норма оператора равна максимальному сингулярному числу этого оператора.*

Док–во. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ОНБ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, а $\rho_1, \ldots, \rho_n$ – сингулярные числа $\mathcal{A}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $\rho_k = \max_{1 \leq i \leq n} \rho_i$ =>

$$\|\mathcal{A}x\|_E^2 = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) == \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 |x_i|^2$$
$$\leq \rho_k^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

=> $\|\mathcal{A}x\|_E \leq \rho_k$, если $\|x\|_E = 1$, и $\|\mathcal{A}x\|_E = \rho_k$,

если $x = e_k$ ($\|e_k\|_E = 1$) =>

$$\rho_k = \max_{\|x\|_E = 1} \|\mathcal{A}x\|_E = \sup_{\|x\|_E = 1} \|\mathcal{A}x\|_E = \|\mathcal{A}\|_2 \quad \blacksquare$$

С1. *Спектральная норма нормального оператора равна абсолютному значению максимального по модулю собственного значения этого оператора.*

Т6. *Сингулярные числа ЛО в евклидовом* (*унитарном*) *пр–ве не изменяются при умножении оператора на ортогональный* (*унитарный*) *оператор.*

Док–во. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{V}$, где $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{I}$, $\mathcal{V}^*\mathcal{V} = \mathcal{I}$ =>

$\mathcal{B}^*\mathcal{B} = \mathcal{V}^*\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{V}$ => матрицы операторов $\mathcal{B}^*\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ подобны и их собственные значения совпадают.

С2. *Спектральная норма ЛО не изменяется при умножении оператора на ортогональный* (*унитарный*) *оператор.*

54. Матричные нормы. Унитарно инвариантные н–ы.

Норма в V – отображение $\|\bullet\|: V\to\mathbb{R}$, ставящее в соответствие $\forall$ вектору $x\in V$ число $\|x\|\in\mathbb{R}$ и удовлетворяющее аксиомам: $\forall\ x, y\in V$ и $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$

1) $\|x\|\geq 0$, $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$ 2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$;

3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника).

Норма $\|\mathcal{A}\|$ называется ***нормой*** оператора $\mathcal{A}$, ***подчиненной*** векторным нормам пространств V и W:

$$\|\mathcal{A}\|=\sup_{x\neq\theta}\frac{\|\mathcal{A}x\|_W}{\|x\|_V}=\sup_{\|x\|_V=1}\|\mathcal{A}x\|_W$$

Пусть каждой комплексной матрице A поставлено в соответствие число $f(A)\geq 0$ такое, что:

1) $f(A)$ является нормой на $\mathbb{C}^{m\times n}$ для всех m, n;

2) $f(AB)\leq f(A)f(B)$ для $\forall$ матриц A и B, допускающих умножение. Тогда $f(A)$ называется ***матричной нормой.***

У1. *Пусть для $\forall\ n$ задана векторная норма на $\mathbb{C}^n$, и пусть для $\forall\ m, n$ и $\forall$матрицы $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ норма $\|A\|$ определена как операторная норма, порожденная данными вектор–ными нормами. Тогда $\|A\|$ является матричной нормой.*

Док–во. Пусть $\|x\|_*$ – векторная норма для $x\in\mathbb{C}^n$ при $\forall\ n$. Для $\forall$ матриц A и B, допускающих умножение, $\exists\ x_0$ единичной нормы такой : $\|AB\|=\|ABx_0\|_*\leq$

$$\leq\|A\|\cdot\|Bx_0\|_*\leq\|A\|\cdot\|B\|\cdot\|x_0\|_*=\|A\|\cdot\|B\| \quad\blacksquare$$

Пусть $e=(e_1,\dots,e_n)$ и $f=(f_1,\dots,f_m)$ – базисы пр–тв V и W. Введем в V и W векторную норму $\|\cdot\|_p$ как норму Гёльдера одинакового типа:

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\text{, где } p=1,2,\infty \quad (\mathbf{1})$$

Пусть $\|\mathcal{A}\|_p$ – норма, подчиненная векторным нормам $\|\cdot\|_p$, $A=(a_{ij})$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисах e и f.

Т1. *Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V,W)$*

$$\|\mathcal{A}\|_1=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

Док–во. Пусть $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ =>

$$\mathcal{A}x=\sum_{j=1}^{n}x_j\mathcal{A}e_j=\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}f_i=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)f_i$$

Согласно (1)

$$\|\mathcal{A}x\|_1=\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\leq\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}|x_j|\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| \quad (\mathbf{2})$$

Пусть у k–й столбца A максимальная столбцовая сумма:

$$\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$$

$$\text{из (2) => } \|\mathcal{A}x\|_1\leq\sum_{j=1}^{n}|x_j|\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|=\|x\|_1\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|$$

$$=>\begin{cases}\|\mathcal{A}x\|_1\leq\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|,\forall x:\|x\|_1=1\\ \|\mathcal{A}x\|_1=\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|,\ x=e_k\ (\|e_k\|_1=1)\end{cases}=>$$

$$=>\quad\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|=\sup_{\|x\|_1=1}\|\mathcal{A}x\|_1 \quad\blacksquare$$

Т2. *Для $\forall$ ЛО $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V,W)$*

$$\|\mathcal{A}\|_\infty=\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

Док–во ан–но Т1.

Евклидовой нормой (или ***нормой Фробениуса***) матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m\times n$ называется число

$$\|A\|_F=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

У2. *Норма Фробениуса является матричной нормой.*

Док–во. Для $\forall\ m, n$ норма Фробениуса является нормой на линейном пр–ве $\mathbb{C}^{m\times n}$(как 2–норма на пр–ве $\mathbb{C}^{mn}$ изомор–фном $\mathbb{C}^{m\times n}$). Пусть $a_1,\dots,a_n$ – столбцы A, а $b_1^T,\dots,b_n^T$ – строки B => $AB=a_1b_1^T+\dots+a_nb_n^T$. Из неравенства треугольника, равенства $\|a_ib_i^T\|_F=\|a_i\|_F\|b_i\|_F$ и неравенства Коши–Буняковского($|(x,y)|^2\leq(x,x)(y,y)$):

$$\|AB\|_F\leq\sum_{i=1}^{n}\|a_ib_i^T\|_F=\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_F\|b_i\|_F\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|_F^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}\|b_i\|_F^2\right)^{1/2}$$

$$=\|A\|_F\|B\|_F \quad\blacksquare$$

Ограниченный ЛО $\mathcal{A}: V\to V$ со св–вом $\|\mathcal{A}x\|=\|x\|$ $\forall x\in V$ называется ***изометрическим*** или ***сохраняющим норму***. Пусть в $\mathbb{C}^n$ задана какая–то норма, а матрица $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ (как ЛО из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$) ее сохраняет. Такая матрица называется ***изометрической*** относительно данной нормы.

У3. *Множество всех комплексных $n\times n$–матриц, изометрических относительно гельдеровской 2–нормы, совпадает с множеством унитарных матриц порядка n.*

Док–во. 2–норма порождается естественным скалярным произведением в $\mathbb{C}^n$. Из исследований, связанных с тождеством параллелограмма => сохранение длин влечет за собой сохранение скалярных произведений: $(Ax, Ay)=(x,y) \Leftrightarrow y^*(A^*A)x=y^*x\ \ \forall x,y\in\mathbb{C}^n$ => $y^*(A^*A-I)x=0$ для $\forall x,y\in\mathbb{C}^n$. Если x и y – векторы стандартного базиса => все элементы матрицы A^*A-I равны 0 => сохранение 2–нормы $\Leftrightarrow$ условию $A^*A=I$, определяющем унитарную матрицу. •

Матричная норма $\|\bullet\|$ ***унитарно инвариантна***, если $\|PAQ\|=\|A\|$ для $\forall$ матрицы A и $\forall$ унитарных матриц P и Q, допускающих умножение.

У4. *Норма Фробениуса является унитарно инвариантной.*

Док–во. Q – унитарная матрица и $A=[a_1,\dots,a_n]$ => из У3:

$$\|Qa_j\|_2=\|a_j\|_2, j=\overline{1,n} \quad =>$$

$$\|QA\|_F^2=\sum_{j=1}^{n}\|Qa_j\|_2^2=\sum_{j=1}^{n}\|a_j\|_2^2=\|A\|_F^2 \quad\blacksquare$$

Спектральная норма матрицы – матричная норма, подчиненная гельдеровской 2–норме:

$$\|A\|_2=\sup_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2$$

У5. *Спектральн. норма матрицы унитарно инвариантна.*

Док–во. Q – унитарная матрица и $A=[a_1,\dots,a_n]$. По опр.

$$\|A\|_2=\sup_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2=\sup_{\|x\|_2=1}\|(QA)x\|_2=\|QA\|_2$$

$$\|AQ\|_2=\sup_{\|x\|_2=1}\|(AQ)x\|_2=\sup_{\|Q^*x\|_2=1}\|(AQ)(Q^*x)\|_2=$$

$$=\sup_{\|x\|_2=1}\|(Ax)\|_2=\|A\|_2 \quad\blacksquare$$

55. Сингулярное разложение матрицы и обобщенное решение.

Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Тогда $A^*A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – эрмитова неотрицательно определенная матрица:

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A,$$
$$xA^*Ax = (Ax, Ax) = |Ax|^2 \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

=> все ее собственные значения ≥ 0. Неотрицательные квадратные корни из собственных значений матрицы A^*A называются ***сингулярными числами*** матрицы A. Сингулярные числа $\sigma_i = \sigma_i(A)$ нумеруют по невозрастанию: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$. Пусть A имеет r ненулевых сингулярных чисел.

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ – ОНБ из собственных векторов матрицы A^*A : $A^*Au_i = \begin{cases}\sigma_i^2 u_i, & 1 \leq i \leq r\\ 0, & r+1 \leq i \leq n\end{cases}$

Положим $v_i = Au_i/\sigma_i,\ \ 1 \leq i \leq r \Rightarrow\ (v_i, v_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(v_i, v_i) = 1$. Дополним систему $v_1, \ldots, v_r$ векто–рами $v_r, \ldots, v_m$ до ОНБ в $\mathbb{C}^m$.

Заметим : при $j \geq r+1$

$$A^*Au_j = 0\ \Rightarrow\ u_j^*A^*Au_j = 0\ \Rightarrow\ (Au_j)^*(Au_j) = 0$$
$$\Rightarrow\ |Au_j| = 0\ \Rightarrow\ Au_j = 0$$

В итоге:

$$A[u_1, \ldots, u_n] = [v_1, \ldots, v_m]\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ AU = V\Sigma$$

где $U = [u_1, \ldots, u_n]$ и $V = [v_1, \ldots, v_m]$ – унитарные матрицы, а Σ – диагональная прямоугольная матрица тех же размеров, что и A. Столбцы матриц U и V образуют ***сингулярные базисы*** матрицы A. Столбцы U – *правые сингулярные векторы* матрицы A, столбцы V – *левые.* Связь между сингулярными векторами и ненулевыми сингулярными числами :

$Au_i = \sigma_i v_i,\ \ A^*v_i = \sigma_i u_i,\ \ \ 1 \leq i \leq r$

И $\ Au_i = 0,\ \ r+1 \leq i \leq n,\ \ \ A^*v_i = 0,\ \ \ r+1 \leq i \leq m$

=> для $\forall$ *матрицы* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *имеет место равенство* $AU = V\Sigma$ **(1)** *для некоторых унитарных матриц* $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и диагональной *прямоугольной матрицы размеров* $m \times n$ *с числами* $\sigma_i \geq 0$ *при* $i = j$. ***Сингулярное разложение*** матрицы: $A = V\Sigma U^*$ **(2)**.

Если получено разложение (2) с унитарными U и V, то $A^*A = U(\Sigma^*\Sigma)U^*$ => если Σ – диагональная прямоу–гольная матрица с неотрицательными элементами, то ее ненулевые элементы определены однозначно.

Если $m = n$, то (2) : $A = (V\Sigma V^*)(VU^*) = HQ$, где $H = V\Sigma V^*$ неотрицательно определенная (=> также эрмитова) матрица, а $Q = VU^*$ унитарная матрица (как произведение унитарных матриц). Представление A в виде $A = HQ$ с неотрицательно определенной H и унитарной Q называется ее ***полярным разложением***.

Выводы из сингулярного разложения:

1) *Число ненулевых сингулярных чисел* r = *рангу* A.

2) *Сингулярное разложение сопряженной матрицы*:
$$A^* = U\Sigma V^*.$$

3) $\operatorname{im} A = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_r)$, $\ker A = \mathcal{L}(u_{r+1}, \ldots, u_n)$.

4) $\operatorname{im} A^* = \mathcal{L}(u_1, \ldots, u_r)$, $\ker A^* = \mathcal{L}(v_{r+1}, \ldots, v_m)$.

Следствие : $\mathbb{C}^n = \ker A \oplus \operatorname{im} A^*$, $\mathbb{C}^m = \ker A^* \oplus \operatorname{im} A$

5) $A = \sum_{k=1}^{r}\sigma_k v_k u_k^*, \qquad A^* = \sum_{k=1}^{r}\sigma_k u_k v_k^*$

6) *Если* $m = u = r$ (*матрица* A *невырожденная*), *то*

$$A = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k v_k u_k^*, \qquad A^* = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k u_k v_k^*$$

7) *Пусть* $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$ – *сингулярные числа невырож–денной* A => $\sigma_1^{-1} \geq \ldots \geq \sigma_n^{-1}$ –*сингулярные числа* A^{-1} .

8) $\|A\|_2 = \sigma_1, \quad \|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}$

Спектральная и фробениусова нормы унитарно инвариантны => $\|A\|_2 = \|\Sigma\|_2$, $\|A\|_F = \|\Sigma\|_F$. Очевидно, $\|\Sigma x\|_2 \leq \sigma_1\|x\|_2$, равенство достигается, если x имеет 1 в 1–й позиции и 0 в остальных. Ясно, что $\|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}$ •

У1. *Решение системы* $Ax = b$ *с невырожденной .матрицей* A *имеет вид*

$$x = \sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{\sigma_k}u_k,$$

где $\beta_k = v_k^* b = (v_k, b)$ – *коэффициенты разложения вектора* b *по сингулярным векторам* $v_1, \ldots, v_n$.

Док–во. Выражение для x получается из св–ва 6. Если $b = \beta_1 v_1 + \cdots \beta_n v_n$, то $(b, v_k) = \beta_k(v_k, v_k) = \beta_k$ (вследствие ортонормированности системы $v_1, \ldots, v_n$) •

Если система $Ax = b$ несовместна, то $Ax = b$ не выпол–няется ни для одного вектора x => интересуются такими x, при которых вектор $b - Ax$ (*невязка* для x) имеет минимально возможную длину. Вектор x называется ***псевдорешением*** системы $Ax = b$, если

$$\|b - Ax\|_2 = \min_z \|b - Az\|_2$$

В методе определения "обобщенного решения" в вещественном случае речь идет о наименьшем значении суммы квадратов

$$\|b - Az\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m}(b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_1)^2$$

У2. *Пусть* A – *матрица размеров* $m \times n$ *и ранга* r. *Множество псевдорешений системы* $Ax = b$ *есть линейное многообразие размерности* $n - r$

Док–во. Пусть h – перпендикуляр, опущенный из вектора b на подпространство $\operatorname{im} A$, $y \in \operatorname{im} A$ –соответствующая ортогональная проекция => система $Az = y$ совместна, и если z – ее произвольное решение, то $|h| = |b - Az| < |b - Ax|$ для $\forall x$: $Ax \neq y$ => множество псевдорешений совпадает с множеством решений совместной системы $Az = y$. •

Среди всех псевдорешений выделяется псевдорешение x минимальной длины, т.е. ***нормальное псевдоре–шение***. Геометрически x – перпендикуляр, опущенный на $\ker A$ из $\forall$ частного решения z совместной системы $Az = y$ (вектор y – ортогональная проекция вектора b на $\operatorname{im} A$) => $\exists$! *нормальное псевдорешение.* Из сингулярного разложения => явный вид нормального псевдорешения:

$$\hat{x} = \sum_{k=1}^{r}\frac{v_k^* b}{\sigma_k}u_k$$

Для док–ва проверить, что $b - A\hat{x} \perp \operatorname{im} A$ и $\hat{x} \perp \ker A$.

56. Вариационные (экстремальные) свойства собственных значений самосопряженного оператора (матрицы).

Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор в евклидовом (унитарном) пр–ве V. Построим в V ОНБ $e_1, \ldots, e_n$ **(1)** из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих собственным значениям $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$.

Норма – евклидова $\|\bullet\|_E$ => если $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, то

$$\|x\|_E = \sqrt{(x,x)} = \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}$$

Т1. *Для самосопряженного оператора* $\mathcal{A}$

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|=1}(\mathcal{A}x, x), \quad \lambda_n = \min_{\|x\|=1}(\mathcal{A}x, x)$$

Док–во. Для $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$: $\mathcal{A}x = \sum_{i=1}^n x_i\lambda_i e_i \in V$ => т.к (1) – ОНБ, то $(\mathcal{A}x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2$.

Т.к. $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$, то $\lambda_1 > (\mathcal{A}x, x) > \lambda_n$, если $\|x\| = 1$; причем $(\mathcal{A}e_1, e_1) = \lambda_1$, $(\mathcal{A}e_n, e_n) = \lambda_n$ и $\|e_1\| = 1$, $\|e_n\| = 1$ => λ_1 и λ_n – наибольшее и наименьшее значения $(\mathcal{A}x, x)$ на единичной евклидовой сфере. •

З. Т1 дает экстремальные свойства КФ в евклидовом (унитар–ном) пр–ве: *на единичной сфере КФ* $\mathcal{A}(x,x)$ *принимает экстремальные значения на тех векторах, которые являются собственными векторами самосопряженного оператора* $\mathcal{H}$ (Т: *Для* $\forall$ *КФ* $\mathcal{A}(x, x)$ *в евклидовом пр–ве* E $\exists$! *симметрический оператор* $\mathcal{H} \in \mathcal{L}(E, E)$: $\mathcal{A}(x, x) = (\mathcal{H}x, x)$, $\forall x \in E$.).

Т2. *Если* L – *линейная оболочка собственных векторов* $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ $(i_1 < \cdots < i_k)$ *из* (1) *самосопряженного оператора* $\mathcal{A}$, *то*

$$\lambda_{i_1} = \max_{\|x\|=1, x\in L}(\mathcal{A}x, x), \quad \lambda_{i_k} = \min_{\|x\|=1, x\in L}(\mathcal{A}x, x) \quad \mathbf{(2)}$$

Док–во ан–но док–ву Т1. •

Т3 (Куранта–Фишера). *Для собственных значений самосопряженного оператора* $\mathcal{A}$ *справедливо*

$$\lambda_k = \max_{L_k}\min_{\|x\|=1, x\in L}(\mathcal{A}x, x) \quad \mathbf{(3)}$$

где максимум берется по всевозможным k*–мерным подпространствам* L_k *пр–ва* V.

Док–во. Пусть L_k – произвольное k–мерное подпространство и W_{n-k+1} – линейная оболочка собственных векторов $e_k, \ldots, e_n$ из (1) оператора $\mathcal{A}$.

Т.к. $\dim L_k + \dim W_{n-k+1} = n+1$, то $L_k \cap W_{n-k+1} \neq \{\theta\}$. Пусть $x_0 \in L_k \cap W_{n-k+1}$ и $\|x_0\| = 1$ => согласно (2)

$\mathcal{A}(x_0, x_0) < \lambda_k$ =>

$$\min_{\|x\|=1, x\in L}(\mathcal{A}x_0, x_0) \leq \lambda_k \Rightarrow$$
$$\max_{L_k}\min_{\|x\|=1, x\in L}(\mathcal{A}x_0, x_0) \leq \lambda_k$$

Равенство в (3) достигается для $L_k = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$. •

Изложение от Тыртышникова.

Для эрмитовой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ как функция от векторов $x \in \mathbb{C}^n$ рассматривается *отношение Рэлея*

$$\Phi_A(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}, \qquad x \neq 0$$

Л. *В* $\forall$ *подпространстве* $L \subset \mathbb{C}^n$ $\exists$ *векторы* $x_{min}(L)$ *и* $x_{max}(L)$, *принадлежащие* L : $\Phi_A(x_{min}) \leq \Phi_A(x) \leq \Phi_A(x_{max}), \forall x \in L, x \neq 0$

Док–во. Функция $\Phi_A(x)$ непрерывна на единичной сфере $\|x\|_2 = 1$ конечномерного пр–ва L. По теореме Вейерштрасса, она принимает там наименьшее и наибольшее значение в каких–то точках x_{min} и x_{max}. Они являются искомыми. •

Т Куранта–Фишера. *Собственные значения* $\lambda_1(A) > \ldots > \lambda_n(A)$ *эрмитовой матрицы* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *связаны с отношением Рэлея* $\Phi_A(x)$ *следующим образом:*

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim L = k}\ \min_{x\in L, x\neq 0}\Phi_A(x) = \min_{\dim L = n-k+1}\ \max_{x\in L, x\neq 0}\Phi_A(x) \quad \mathbf{(4)}$$

Док–во. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ОНБ из собственных векторов матрицы A: $Ae_i = \lambda_i e_i$, $1 < i < n$.

Пусть $L_k = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$ и $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i \in L_k, x \neq 0$ =>

$$\Phi_A(x) = \frac{\lambda_1|x_1|^2 + \cdots + \lambda_k|x_k|^2}{|x_1|^2 + \cdots + |x_k|^2} \geq \lambda_k,$$
$$\Phi_A(e_k) = \lambda_k \ \Rightarrow\ \min_{x\in L_k, x\neq 0}\Phi_A(x) = \lambda_k$$

Рассмотрим подпространство $M_k = \mathcal{L}(e_k, \ldots, e_n)$ размерности $n - k + 1$. Пусть $x = \sum_{i=k}^n x_i e_i \in M_k, x \neq 0$

$$\Rightarrow \Phi_A(x) = \frac{\lambda_k|x_k|^2 + \cdots + \lambda_n|x_n|^2}{|x_k|^2 + \cdots + |x_n|^2} \leq \lambda_k,$$
$$\Phi_A(e_k) = \lambda_k \ \Rightarrow\ \max_{x\in M_k, x\neq 0}\Phi_A(x) = \lambda_k$$

Пусть L – произвольное подпространство размерности k. Т.к. $\dim L + \dim M_k = n+1$, то $\exists\, z \in L \cap M_k$, $z \neq \theta$. =>

$$\min_{x\in L, x\neq 0}\Phi_A(x) \leq \Phi_A(z) \leq \max_{x\in M_k, x\neq 0}\Phi_A(x) = \lambda_k$$

=> 1–е из (4) доказано. Чтобы получить 2–е, возьмем $\forall$ подпр–во L: $\dim L = n - k + 1$ => $\exists\, z \in L \cap L_k$, $z \neq \theta$

$$\Rightarrow\ \max_{x\in L, x\neq 0}\Phi_A(x) \geq \Phi_A(z) \geq \min_{x\in L_k, x\neq 0}\Phi_A(x) = \lambda_k$$

----

*(Вейерштрасса):*Для* $\forall$ *вещественной функции* $f(x)$, *непрерывной во всех точках компактного множества* S, $\exists$ *точки* x_{min} , $x_{max} \in S$: $f(x_{min}) < f(x) < f(x_{max})$ *для всех* $x \in S$

57. Вариационные (экстремальные) свойства сингулярных чисел.
Арифметические значения квадратных корней из собственных значений матрицы A^*A называются ***сингулярными числами*** матрицы A.
Т. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *имеет сингулярные числа* $\sigma_1(A) \geq \ldots \geq \sigma_{\min(m,n)}(A)$. *Тогда при всех* $1 \leq k \leq \min(m, n)$

$$\sigma_k(A) = \max_{\dim L = k} \min_{x\in L, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} == \min_{\dim L = n-k+1} \max_{x \in L, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Док–во. Заметим, что $\sigma_k(A) = \sqrt{\lambda_k(A^*A)}$. Очевидно

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\frac{x^*(A^*A)x}{x^*x}}, \qquad x \neq 0$$

=> все следует из вариационных свойств собственных значений эрмитовой матрицы A^*A. (см. ниже)•
Для эрмитовой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ как функция от векторов $x \in \mathbb{C}^n$ рассматривается *отношение Рэлея*

$$\Phi_A(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}, \qquad x \neq 0$$

Л. *В* $\forall$ *подпространстве* $L \subset \mathbb{C}^n$ $\exists$ *векторы* $x_{min}(L)$ *и* $x_{max}(L)$, *принадлежащие* L : $\Phi_A(x_{min}) \leq \Phi_A(x) \leq \Phi_A(x_{max}), \forall x \in L, x \neq 0$
Док–во. Функция $\Phi_A(x)$ непрерывна на единичной сфере $\|x\|_2 = 1$ конечномерного пр–ва L. По Т (*), она принимает там наименьшее и наибольшее значение в каких–то точках x_{min} и x_{max}. Они искомые. •
Т Куранта–Фишера. *Собственные значения* $\lambda_1(A) > \ldots > \lambda_n(A)$ *эрмитовой матрицы* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *связаны с отношением Рэлея* $\Phi_A(x)$ *следующим образом:*

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim L = k} \min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) = \min_{\dim L = n-k+1} \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) \quad \mathbf{(4)}$$

Док–во. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – ОНБ из собственных векторов матрицы A: $Ae_i = \lambda_i e_i$, $1 < i < n$.
Пусть $L_k = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$ и $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i \in L_k, x \neq 0$ =>

$$\Phi_A(x) = \frac{\lambda_1|x_1|^2 + \cdots + \lambda_k|x_k|^2}{|x_1|^2 + \cdots + |x_k|^2} \geq \lambda_k,$$

$$\Phi_A(e_k) = \lambda_k \quad => \quad \min_{x\in L_k, x\neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

Рассмотрим подпространство $M_k = \mathcal{L}(e_k, \ldots, e_n)$ размерности $n - k + 1$.
Пусть $x = \sum_{i=k}^n x_i e_i \in M_k, x \neq 0$

$$=> \Phi_A(x) = \frac{\lambda_k|x_k|^2 + \cdots + \lambda_n|x_n|^2}{|x_k|^2 + \cdots + |x_n|^2} \leq \lambda_k,$$

$$\Phi_A(e_k) = \lambda_k \quad => \quad \max_{x\in M_k, x\neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

Пусть L – произвольное подпространство размерности k. Т.к. $\dim L + \dim M_k = n+1$, то $\exists\, z \in L \cap M_k$, $z \neq \theta$. =>

$$\min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) \leq \Phi_A(z) \leq \max_{x\in M_k, x\neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

=> 1–е из (4) доказано. Чтобы получить 2–е, возьмем $\forall$ подпр–во L: $\dim L = n - k + 1$ => $\exists\, z \in L \cap L_k$, $z \neq \theta$

$$=> \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) \geq \Phi_A(z) \geq \min_{x\in L_k, x\neq 0} \Phi_A(x) = \lambda_k$$

*(Вейерштрасса): *Для* $\forall$ *вещественной функции* $f(x)$, *непрерывной во всех точках компактного множества* S, $\exists$ *точки* $x_{min}, x_{max} \in S : f(x_{min}) < f(x) < f(x_{max})$ *для всех* $x \in S$

58. Соотношения разделения собственных значений и сингулярных чисел матриц и подматриц.
Эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ описана в блочном виде

$$A = \begin{bmatrix} B & u \\ u^* & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}, \; u \in \mathbb{C}^{n-1} \quad \mathbf{(1)}$$

=> подматрица B тоже эрмитова. Пусть $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$ – ее собственные значение и Q – унитарная матрица порядка $n - 1$, приводящая ее к диагональному виду

$$Q^*BQ = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} Q^* & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & u \\ u^* & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 & & & s_1 \\ & \ddots & & \\ & & \mu_{n-1} & s_{n-1} \\ \overline{s_1} & \ldots & \overline{s}_{n-1} & s_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ \ldots \\ s_{n-1} \end{bmatrix} = Q^*u, s_n = \overline{s_n} = a_{nn}$$

Характеристический многочлен матрицы A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} \mu_1 - \lambda & & & s_1 \\ & \ddots & & \\ & & \mu_{n-1} - \lambda & s_{n-1} \\ \overline{s_1} & \ldots & \overline{s}_{n-1} & s_n - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} (\mu_i - \lambda) \left(s_n - \lambda - \frac{|s_1|^2}{\mu_1 - \lambda} - \cdots - \frac{|s_{n-1}|^2}{\mu_{n-1} - \lambda} \right)$$

=> если собственное значение λ матрицы A не совпадает ни с одним из собственных значений $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ подматрицы B, то оно удовлетворяет уравнению

$$\lambda = F(\lambda) \equiv s_n + \frac{|s_1|^2}{\lambda - \mu_1} + \cdots + \frac{|s_{n-1}|^2}{\lambda - \mu_{n-1}}$$

У. *Пусть эрмитова матрица A порядка n с собствен–ными значениями* $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ *имеет блочное разбие–ние* (1), *в котором B – ее эрмитова подматрица порядка n* – 1 *с собственными значениями* $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$. *Тогда если* $\mu_1 > \ldots > \mu_{n-1}$ *и* $s_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n - 1$, *то имеют место соотношения разделения*

$$\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \mu_2 > \ldots > \lambda_{n-1} > \mu_{n-1} > \lambda_n \quad \mathbf{(2)}$$

Док–во. Рассмотрим график функции $y = F(\lambda)$. $F(\lambda)$ не определено при $\lambda = \mu_k$. Т.к. $F(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \mu_k$, $F(\lambda)$ при $\lambda = \mu_k$ обращается в бесконечность. Изучим поведение $F(\lambda)$ на каждом из n интервалов

$I_n = (-\infty, \mu_{n-1})$, $I_n = (\mu_{n-1}, \mu_{n-2})$, …, $I_2 = (\mu_2, \mu_1)$, $I_1 = (\mu_1, +\infty)$.

Пусть $\lambda \in I_k$, $2 \leq k \leq n - 1$ =>

$$\frac{|s_k|^2}{\lambda - \mu_k} + \frac{|s_{k-1}|^2}{\lambda - \mu_{k-1}} \to \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad \lambda \to \mu_k \\ -\infty & \text{при} \quad \lambda \to \mu_{k-1} \end{cases}$$

а остальные слагаемые в $F(\lambda)$ являются ограниченными => $F(\lambda) \to$
$\begin{cases} +\infty & \text{при} \quad \lambda \to \mu_k \\ -\infty & \text{при} \quad \lambda \to \mu_{k-1} \end{cases}$
Т.к. $F(\lambda)$ – непрерывна, то прямая $y = \lambda$ имеет при $\lambda \in I_k$ точку пересечения с графиком функции $y = F(\lambda)$. Случаи $\lambda \in I_1$ и $\lambda \in I_n$ рассматриваются ан–но => уравнение $F(\lambda) = \lambda$ имеет n различных корней. Ни один из них не совпадает ни с одним из чисел μ_k => каждый из них является собственным значением A. •
Т. *Пусть эрмитова матрица* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *имеет собственные значения* $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ *и* $B \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ – *ее эрмитова подматрица в блочном разбиении вида* (1), *имеющая собственные значения* $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}$. *Тогда имеют место соотношения разделения*

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$$

Док–во. Пусть M – подпространство векторов $x = [x_1, ..., x_n]^T$, определяемое уравнением $x_n = 0$. Пусть отображение $v : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ задается : $v(x) = [x_1, ..., x_{n-1}]$ => если $x \in M$, то $\Phi_A(x) = \Phi_B(v(x))$.
Пусть $1 \leq k \leq n - 1$. По Т Куранта– Фишера:

$$\lambda_k = \max_{\dim L = k} \min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) \geq\geq \max_{\dim L = k,\; L\subset M} \min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) =$$

$$= \max_{\dim L = k,\; L\subset M} \min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_B(v(x)) == \max_{\dim L = k,\; L\subset \mathbb{C}^{n-1}} \min_{y\in L, y\neq 0} \Phi_B(y) = \mu_k$$

Пусть теперь $2 \leq k \leq n$. По Т Куранта– Фишера:

$$\lambda_k = \min_{\dim L = n-k+1} \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) =\leq \min_{\dim L = n-k+1,\; L\subset M} \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) =$$

$$= \min_{\dim L = n-k+1,\; L\subset M} \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_B(v(x)) == \min_{\substack{\dim L = (n-1)-(k-1)+1, \\ L\subset \mathbb{C}^{n-1}}} \max_{y\in L, y\neq 0} \Phi_B(y)$$

$$= \mu_{k-1} \blacksquare$$

Т. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *и* $B \in \mathbb{C}^{m\times(n-1)}$ – *подматрица, состоящая из первых n* – 1 *столбцов матрицы A. Тогда для сингулярных чисел A и B имеют место соотношения разделения*

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_1(B) \geq \sigma_2(A) \geq \ldots \geq \sigma_{n-1}(B) \geq \sigma_n(A)$$

Док–во. A имеет вид $A = [B, v]$, где v – ее последний столбец => $A^*A = \begin{bmatrix} B^* \\ v^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^*B & B^*v \\ v^*B & v^*v \end{bmatrix}$
Искомые неравенства получаются из соотношений разделения для эрмитовой матрицы A^*A порядка n и ее ведущей подматрицы B^*B порядка $n - 1$.

---

*: **Т Куранта–Фишера**. *Собственные значения* $\lambda_1(A) > \ldots > \lambda_n(A)$ *эрмитовой матрицы* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *связаны с отношением Рэлея* $\Phi_A(x)$:

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim L = k} \min_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x) =$$

$$= \min_{\dim L = n-k+1} \max_{x\in L, x\neq 0} \Phi_A(x), \text{ где } \Phi_A(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}, \qquad x \neq 0$$